1
ESPACIOS VECTORIALES ESTRUCTURA

1.1. Demostrar que el axioma V8 es equivalente al axioma siguiente :

V8* : $ax = 0 \Leftrightarrow a = 0$ ó $x = 0$,para todo $a \in K$, $x \in V$.

S O L U C I O N :

a) V8 $\Rightarrow$ V8*

En efecto, en todo espacio vectorial se verifica que :

- $0x = 0$ ya que $ax = (a + 0)x = ax + 0x$
  de donde $0x = 0$
- $a0 = 0$ ya que $ax = a(x + 0) = ax + a0$
  de donde $a0 = 0$

Por tanto, $a = 0$ ó $x = 0$ implica $ax = 0$

- Recíprocamente, $ax = 0$ implica $a = 0$ ó $x = 0$
- Si $a = 0$ ya está demostrado
- Si $a \neq 0$ entonces $(a^{-1}a)x = a^{-1}0$, es decir, $x = 0$

b) V8* $\Rightarrow$ V8

Ahora los axiomas que se verifican son V1,...,V8*,veamos que se cumple también V8.

Sea $1x = x'$; si $x = x'$ ya está demostrado. Si $x \neq x'$ entonces se tiene:

$$1x = x' \Leftrightarrow 1x = 1x' \Leftrightarrow 1(x - x') = 0$$

y como $x - x' \neq 0$, se sigue por V8* que $1 = 0$,contradicción.

1.2. En el conjunto $R^2 = R \times R$ se definen las siguientes operaciones:

Suma + : $(x,y) + (x',y') = (x + x',y + y')$

Producto .R : $k(x,y) = (kx,ky)$

[Es]tudiar si la terna $(R^2,+,.R)$ es un espacio vectorial.

[S]OLUCION :

$(x,y)+((x',y')+(x'',y'')) = (x,y) + (x'+x'',y'+y'')$
$= (x+(x'+x''),y+(y'+y''))$
$= ((x+x')+x'',(y+y')+y'')$
$= (x+x',y+y') + (x'',y'')$
$= ((x,y) + (x',y')) + (x'',y'')$

$(x,y) + (x',y') = (x + x',y + y')$
$= (x' + x,y' + y)$
$= (x',y') + (x,y)$

El elemento neutro es el vector $(0,0)$ ya que $(x,y) + (0,0) = (x,y)$

El elemento opuesto de (x,y) es $(-x,-y)$ ya que $(x,y) + (-x,-y) = (0,0)$.

$a((x,y) + (x',y')) = a(x + x' ,y + y')$
$= (a(x + x') ,a(y + y'))$
$= (ax + ax' , ay + ay')$
$= (ax,ay) + (ax',ay')$
$= a(x,y) + a(x',y')$

$(a + b)(x,y) = ((a + b)x ,(a + b)y)$
$= (ax + bx , ay + by)$
$= (ax,ay) + (bx,by)$
$= a(x,y) + b(x,y)$

$a(b(x,y)) = a(bx ,by)$
$= ((a(bx),a(by))$
$= ((ab)x ,(ab)y)$
$= (ab)(x,y)$

$1.(x,y) = (1.x,1.y) = (x,y)$

Por verificarse los 8 axiomas de espacio vectorial se sigue que

$(R^2,+,.R)$ = Espacio vectorial real

Los pares (x,y) pueden llamarse ahora con justicia "vectores numéricos".

1.3. En el conjunto $R^2 = R \times R$ se definen las siguiente operaciones :

Suma + : $(x,y) + (x',y') = (x + x',y + y')$

Producto .R : $a(x,y) = (ax,0)$

Estudiar si la terna $(R^2,+,.R)$ es un espacio vectorial.

SOLUCION :

1) El par $(R^2,+)$ es un grupo conmutativo.

1) La propiedad asociativa es consecuencia de serlo la suma de números reales.

2) El elemento neutro es el par $(0,0)$

3) El elemento opuesto del par (x,y) es el par $(-x,-y)$

4) La conmutatividad es consecuencia de serlo la suma de números reales.

2) La operación externa verifica las siguientes propiedades:

5) $a((x,y) + (x',y')) = a(x + x' , y + y')$
$= (a(x + x') , 0)$
$= (ax + ax', 0)$
$= (ax,0) + (ax', 0)$
$= a(x,y) + a(x', y')$

6) $(a + b)(x,y) = ((a + b)x , 0)$
$= (ax + bx , 0)$
$= (ax ,0) + (bx , 0)$
$= a(x,y) + b(x,y)$

7) $a(b(x,y)) = a(bx , 0)$
$= (a(bx) ,0)$
$= ((ab)x , 0)$
$= (ab)(x,y)$

8) $1.(x,y) = (1.x ,0) = (x,0) \neq (x,y)$

El axioma V8. de los espacios vectoriales no se verifica, luego la terna $(R^2,+,.R)$ no es un espacio vectorial.

3) Nótese que el conjunto R^2 con las operaciones indicadas cumple los siete primeros axiomas del espacio vectorial. Esto demuestra que el axioma V8. es independiente de los demás.

Conviene señalar esto ya que en los casos ordinarios de espacios vectoriales el axioma V8. parece trivial,y no se ve,si no profundizamos,su necesidad en la axiomática de esta estructura.

1.4. Demostrar que, en la axiomática usual de espacio vectorial bre un cuerpo **K**, la condición de conmutatividad del grupo aditivo redundante.

OLUCION:

efecto, sea **V** el espacio vectorial, y sean $x,y \in V$, entonces

$$\begin{aligned} x + y + x + y &= 1.(x + y) + 1.(x + y) \\ &= (1 + 1)(x + y) \\ &= (1 + 1)x + (1 + 1)y \\ &= x + x + y + y \end{aligned}$$

mplificando por la derecha y por la izquierda la anterior relación resulta:

$$y + x = x + y$$

1.5. Sea **R** el cuerpo de los números reales. En $R^2 = \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ se de inen la operación interan

$$(x,y) + (x',y') = (x + x',y + y')$$

la operación externa con escalares reales

$$k(x,y) = (kx,y)$$

studiar las propiedades de espacio vectorial que se verifican.

OLUCION:

El par $(R^2,+)$ es un grupo conmutativo como ya hemos visto en otros ejercicios anteriores.

Veamos qué propiedades de la operación externa se verifican.

V5. $k((x,y) + (x',y')) = k(x + x',y + y')$
$= (k(x + x'),y + y')$
$= (kx + kx' ,y + y')$
$= (kx,y) + (kx',y')$
$= k(x,y) + k(x',y')$, luego se verifica V5.

V6. $(k + h)(x,y) = ((k + h)x,y)$
$= (kx + hx,y)$
$\neq (kx,y) + (hx,y)$
$= k(x,y) + h(x,y)$, luego **NO** se verifica V6.

V7. $k(h(x,y)) = k(hx,y)$
$= (khx,y)$
$= (kh)(x,y)$, luego se verifica V7.

de donde se sigue V7.

V8. $1(x,y) = (1x,y) = (x,y)$, luego se verifica V8.

1.6. Sea **R** el cuerpo de los números reales. En $R^2 = \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ se definen la operación interna

$$(x,y) + (x',y') = (x + x',y + y')$$

y la operación externa con escalares reales,

$$k(x,y) = (x,y)$$

Estudiar si la terna $(R^2,+,.R)$ es un espacio vectorial.

SOLUCION:

1) El par $(R^2,+)$ es un grupo conmutativo como ya hemos visto en otros ejercicios anteriores.

2) Veamos si se verifican las propiedades de la operación externa.

V5. $k((x,y) + (x',y')) = k(x + x',y + y')$
$= (x + x',y + y')$
$= (x,y) + (x',y')$
$= k(x,y) + k(x',y')$

y, por tanto, se verifica el axioma V5.

V6. $(k + h)(x,y) = (x,y)$
$\neq (x,y) + (x,y)$
$= k(x,y) + h(x,y)$

y, por tanto, no se verifica el axioma V6.

V7. $k(h(x,y)) = k(x,y)$
$= (x,y)$
$= (kh)(x,y)$

Luego se verifica el axioma V7.

V8. $1(x,y) = (x,y)$

Luego se verifica también el axioma V8.

De lo anterior se sigue que $(R^2,+,.R)$ no es un espacio vectorial.

1.7. Sea **V** un espacio vectorial no nulo sobre un cuerpo **K** de infinitos elementos; demostrar que **V** tiene también infinitos elementos.

SOLUCION:

Puesto que **V** es distinto de $\{0\}$, existe al menos un elemento $x \neq 0$. Los vectores ax con $a \in K$ son todos distintos ya que si $ax = bx$, $a,b \in K$ entonces

$$ax = bx \Rightarrow ax - bx = 0 \Rightarrow (a - b)x = 0 \Rightarrow a - b = 0$$

de donde $a = b$, contradicción

Por tanto, **V** tiene al menos tantos elementos, es decir, vectores como elementos tiene **K**.

1.8. Sea $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ el cuerpo de los números congruentes módulo 2, $\mathbb{K} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, se considera el espacio vectorial $(\mathbb{K}^2,+,\cdot\mathbb{K})$. Se pide

Número de vectores de este espacio,

Formar la tabla del grupo aditivo.

Demostrar que esta tabla es isomorfa al grupo de KLEIN K_4.

LUCION :

El cuerpo base $\mathbb{K}$ consta de dos elementos, las clases $\bar{0},\bar{1}$.Luego $\mathbb{K}^2 = \mathbb{K}\times\mathbb{K}$ consta de cuatro elementos. Los vectores son los siguientes:

$$\vec{v}_o = (\bar{0},\bar{0}) \ ; \ \vec{v}_1 = (\bar{0},\bar{1}) \ ; \ \vec{v}_2 = (\bar{1},\bar{0}) \ ; \ \vec{v}_3 = (\bar{1},\bar{1})$$

La tabla del grupo aditivo es la siguiente:

+	$\vec{v}_o$	$\vec{v}_1$	$\vec{v}_2$	$\vec{v}_3$
$\vec{v}_o$	$\vec{v}_o$	$\vec{v}_1$	$\vec{v}_2$	$\vec{v}_3$
$\vec{v}_1$	$\vec{v}_1$	$\vec{v}_o$	$\vec{v}_3$	$\vec{v}_2$
$\vec{v}_2$	$\vec{v}_2$	$\vec{v}_3$	$\vec{v}_o$	$\vec{v}_1$
$\vec{v}_3$	$\vec{v}_3$	$\vec{v}_2$	$\vec{v}_1$	$\vec{v}_o$

Esta tabla es un grupo de orden cuatro.Es evidente que no se trata del grupo cíclico ya que todos los elementos son de orden dos, luego es isomorfo al grupo de KLEIN K_4 o grupo del rectángulo.

1.9. Sea $\mathbb{K} = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ y $(\mathbb{K}^3,+,\mathbb{K})$ el espacio vectorial sobre el erpo $\mathbb{K}$.

pide :

Número de vectores del espacio vectorial.

Si $\vec{v}$ es un vector cualquierda de $\mathbb{K}^3$, ¿qué puede decirse de

$$\vec{v}+\vec{v}+\vec{v} \ ?$$

OLUCION :

El cuerpo base consta de tres elementos $\bar{0},\bar{1},\bar{2}$ .Luego el número de elementos de $\mathbb{K}^3$ es :

$$\begin{aligned} \text{Card}(\mathbb{K}^3) &= \text{Card}(\mathbb{K}\times\mathbb{K}\times\mathbb{K}) \\ &= \text{Card}(\mathbb{K}).\text{Card}(\mathbb{K}).\text{Card}(\mathbb{K}) \\ &= 3.3.3 = 27 \end{aligned}$$

$$\vec{v}+\vec{v}+\vec{v} = \bar{3}.\vec{v} = \bar{0}.\vec{v} = \vec{0}$$

Por tanto, en todo espacio vectorial $\mathbb{K}^n$ cuyo cuerpo base sea de característica 3 se verifica que

$$\vec{v}+\vec{v}+\vec{v} = \vec{0}$$

1.10. Sea $\mathbb{R}^2$ el conjunto de los pares de números reales,se definen las operaciones :

$$(x,y) + (x',y') = (x + x',y + y')$$
$$k(x,y) = (k^2x,k^2y) \qquad , k \in \mathbb{R}$$

Estudiar las propiedades de espacio vectorial que se verifican.

SOLUCION :

i) $(\mathbb{R}^2,+)$ es un grupo conmutativo, como se ha visto ya en los ejercicios anteriores.

ii) Veamos ahora cuáles de los axiomas V5,V6,V7 y V8 se cumplen.

- V5 : $$\begin{aligned} k((x,y) + (x',y')) &= k(x + x',y + y') \\ &= (k^2(x+x'),k^2(y + y')) \\ &= (k^2x + k^2x', k^2y + k^2y') \\ &= (k^2x, k^2y) + (k^2x',k^2y') \\ &= k(x,y) + k(x',y') \end{aligned}$$

  Luego, se cumple el axioma V5.

- V6 : $$\begin{aligned} (k + h)(x,y) &= ((k + h)^2x,(k + h)^2y) \\ &= ((k^2 + 2kh + h^2)x,(k^2 + 2kh + h^2)y) \\ &= (k^2x + 2khx + h^2x, k^2y + 2khy + h^2y) \\ &\neq (k^2x,k^2y) + (h^2x,h^2y) \\ &= k(x,y) + h(x,y) \end{aligned}$$

  Esta propiedad no se verifica en general.Si $k = 1$, $h = 2$ y $(x,y) = (3,4$ se tiene ,

  $(1 + 2)(3,4) = 3(3,4) = (3^2.3,3^2.4) = (27,36)$

  $1(3,4) + 2(3,4) = (3,4) + (12,16) = (15,20)$

  que evidentemente son distintos.

- V7 : $$\begin{aligned} k(h(x,y)) &= k(h^2x,h^2y) \\ &= (k^2h^2x \ ,k^2h^2y) \\ &= ((kh)^2x,(kh)^2y) \\ &= (kh) \ (x,y) \end{aligned}$$

  Luego, se cumple V7.

- V8 : $1.(x,y) = (1^2x,1^2y) = (x,y)$

  Luego, también se verifica el axioma V8.

1.11. Sea **K** un cuerpo de característica dos. En $K^2 = K \times K$ se de-
en la operación interna

$$(x,y) + (x',y') = (x + x', y + y')$$

a operación externa con escalares de **K**

$$k(x,y) = (k^2x, k^2y)$$

udiar si la terna $(K^2,+,.K)$ es un espacio vectorial.

LUCION:

El par $(K^2,+)$ es un grupo conmutativo.

V1. La propiedad asociativa es consecuencia de serlo la suma en **K**.

V2. La propiedad conmutativa es consecuencia de serlo la suma en **K**.

V3. El elemento neutro de la suma es el par (0,0)

V4. El elemento opuesto del par (x,y) es el par (-x,-y).

Veamos las propiedades de la operación externa.

V5. $k((x,y) + (x',y')) = k(x + x', y + y')$
$= (k^2(x + x'), k^2(y + y'))$
$= (k^2x + k^2x', k^2y + k^2y')$
$= (k^2x, k^2y) + (k^2x', k^2y')$
$= k(x,y) + k(x',y')$

de donde se sigue el cumplimiento del V5.

V6. $(k + h)(x,y) = ((k + h)^2x, (k + h)^2y)$
$= ((k^2 + h^2 + 2kh)x, (k^2 + h^2 + 2kh)y)$
$= (k^2x + h^2x, k^2y + h^2y)$, ya que **K** es de característica 2,
$= (k^2x, k^2y) + (h^2x, h^2y)$
$= k(x,y) + h(x,y)$

y por tanto, se cumple el axioma V6.

Nótese que esta propiedad se verifica si el cuerpo base es de característica 2. En el ejercicio anterior hemos visto que esta propiedad no se cumple cuando el cuerpo es **R**.

V7. $k(h(x,y)) = k(h^2x, h^2y)$
$= (k^2(h^2x), k^2(h^2y))$
$= ((kh)^2x, (kh)^2y)$
$= (kh)(x,y)$

y por tanto, se cumple la propiedad V7.

V8. $1.(x,y) = (1^2x, 1^2y)$
$= (x,y)$

de donde se sigue el cumplimiento del axioma V8.

lo anterior se sigue que $(K^2,+,.K)$ es un espacio vectorial.

1.12. Sea $\mathbf{R}^2$ el conjunto de pares de números reales, **C** el cuerpo de los números complejos; se definen las operaciones siguientes:

$$(x,y) + (x',y') = (x + x', y + y')$$

$$\alpha(x,y) = (ax - by, bx + ay)$$

siendo $\alpha = a + bi \in \mathbf{C}$.

Demostrar que $(\mathbf{R}^2,+,.\mathbf{C})$ es un espacio vectorial complejo.

SOLUCION:

1) El par $(\mathbf{R}^2,+)$ es un grupo conmutativo como se ha visto ya en ejercicios anteriores.

2) Veamos ahora que se cumplen los 4 restantes axiomas de espacio vectorial.

V5: $\alpha((x,y) + (x',y')) = \alpha(x,y) + \alpha(x',y')$

$\alpha((x,y) + (x',y')) = \alpha(x + x', y + y')$
$= (a(x + x') - b(y + y'), b(x + x') + a(y + y'))$
$= (ax - by + ax' - by', bx + ay + bx' + ay')$
$= (ax - by, bx + ay) + (ax' - by', bx' + ay')$
$= \alpha(x,y) + \alpha(x',y')$

V6: $(\alpha + \beta)(x,y) = ((a + bi) + (c + di))(x,y)$
$= ((a + c) + (b + d)i)(x,y)$
$= ((a + c)x - (b + d)y, (b + d)x + (a + c)y)$
$= (ax - by + cx - dy, bx + ay + dx + cy)$
$= (ax - by, bx + ay) + (cx - dy, dx + cy)$
$= \alpha(x,y) + \beta(x,y)$

V7: $(\alpha\beta)(x,y) = ((a + bi)(c + di))(x,y)$
$= ((ac - bd) + (ad + bc)i)(x,y)$
$= ((ac - bd)x - (ad + bc)y, (ad + bc)x + (ac - bd)y)$
$= (a(cx - dy) - b(dx + cy), b(cx - dy) + a(dx + cy))$
$= (a + bi)(cx - dy, dx + cy)$
$= (a + bi)((c + di)(x,y))$
$= \alpha(\beta(x,y))$

V8: $1.(x,y) = (1 + 0i)(x,y)$
$= (1.x - 0.y, 0.x + 1.y)$
$= (x,y)$

De 1) y 2) se deduce que $(\mathbf{R}^2,+,.\mathbf{C})$ es un espacio vectorial sobre el cuerpo de los números complejos.

1.13. Sea G un grupo abeliano y .K una operación externa sobre G que verifica los axiomas V5,V6 y V7. Demostrar que :

La aplicación $f_a : G \longrightarrow G$ definida por $x \longrightarrow f_a(x) = ax \quad , a \in K$ es un endomorfismo.

$\text{Im } f_1 = \{x \in G / 1x = x\}$

$\text{Im } f_1 \cap \ker f_1 = \{0\}$

Todo elemento x de G puede expresarse de la forma $x = x_1 + x_2$ con $x_1 \in \text{Im } f_1$ y $x_2 \in \ker f_1$. Esta forma es única.

$\text{Im } f_1$ es un espacio vectorial sobre K con las operaciones inducidas.

SOLUCION :

$f_a(x + y) = a(x + y)$, por definición de f_a

$= ax + ay$, por V5

$= f_a(x) + f_a(y)$, por definición de f_a

- Si $1x = x$, es evidente que x es un elemento de $\text{Im } f_1$ ya que x es imagen del mismo.
- Recíprocamente, sea x un elemento de $\text{Im } f_1$, entonces existe un y de G tal que $f_1(y) = x$, es decir, $1y = x$. Veamos que $1x = x$.

  Se tiene : $x = 1y \Rightarrow 1x = 1(1y)$, multiplicando por 1

  $= (1.1)y$, por V7

  $= 1y = x$

Si $x \in \text{Im } f_1 \cap \ker f_1$ entonces $f_1(x) = 1x = x$, por pertenecer a $\text{Im } f_1$

y $f_1(x) = 0$, por pertenecer a $\ker f_1$

luego $x = 0$ e $\text{Im } f_1 \cap \ker f_1 = \{0\}$.

- Sea x un elemento de G, entonces $x_1 = f_1(x)$ pertenece a $\text{Im } f_1$. Tomemos $x_2 = x - x_1$ entonces

  $$f_1(x_2) = f_1(x - x_1) = f_1(x) - f_1(x_1) = x_1 - x_1 = 0$$

  luego $x_2 \in \ker f_1$. Por tanto ,

  $$x = x_1 + x_2 \quad \text{con} \quad x_1 \in \text{Im } f_1 \quad y \quad x_2 \in \ker f_1$$

- La descomposición es única por verificarse c).
- $\text{Im } f_1$ es un subgrupo de G
- $\text{Im } f_1$ es estable para el producto ya que $ax = (1a)x = 1(ax) \in \text{Im } f_1$
- $\text{Im } f_1$ verifica los axiomas V5,V6 y V7 por ser un subconjunto de G y el V8 por el apartado b)

  De lo anterior se deduce que $\text{Im } f_1$ con las operaciones inducidas es un espacio vectorial.

1.14. Sea f una función contínua de **R** en **R**. En **R** se definen las operaciones siguientes :

$$x * y = (x^3 + y^3)^{1/3}$$
$$x \cdot y = f(x)y$$

Determinar las condiciones que tiene que verificar la función f para que $(\mathbf{R}, *, \cdot)$ sea un espacio vectorial. Hallar f.

SOLUCION :

a) En el ejercicio 11.12. del tomo I se ha demostrado que $(\mathbf{R}, *)$ es un grupo conmutativo.

b) Veamos si se verifican los axiomas V5,V6,V7 y V8.

- V5 : $a \cdot (x*y) = f(a)(x^3 + y^3)^{1/3}$

  $= ((f(a)x)^3 + (f(a)y)^3)^{1/3}$

  $= (f(a)x) * (f(a)y)$

  $= (a \cdot x) * (a \cdot y)$

- V6 : $(a + b) \cdot x = (a \cdot x) * (b \cdot x) \Leftrightarrow f(a + b)x = ((f(a)x)^3 + (f(b)x)^3)^{1/3}$

  $\Leftrightarrow (f(a+b)x)^3 = (f(a)x)^3 + (f(b)x)^3$

  $\Leftrightarrow (f(a + b))^3 = (f(a))^3 + (f(b))^3$

- V7 : $(ab) \cdot x = a \cdot (b \cdot x) \Leftrightarrow f(ab)x = f(a)(f(b)x)$

  $\Leftrightarrow f(ab) = f(a)f(b)$

- V8 : $1 \cdot x = x \Leftrightarrow f(1)x = x$

  $\Leftrightarrow f(1) = 1$

El axioma V5 se verifica para toda función f contínua de **R** en **R**.

Los axiomas V6,V7 y V8 nos proporcionan tres condiciones que debe verificar la función f :

$$f(1) = 1 \quad , \quad [1]$$
$$f(ab) = f(a)f(b) \quad , \quad [2]$$
$$(f(a + b))^3 = (f(a))^3 + (f(b))^3 \quad , \quad [3]$$

Las funciones f de $\mathbf{R}_+^*$ en $\mathbf{R}_+^*$ que verifican la segunda condición son precisamente las funciones potenciales, es decir, los isomorfismos contínuos del grupo multiplicativo $\mathbf{R}_+^*$ en sí mismo, y son de la forma $g(x) = x^r$.

Nótese que si se verifica la segunda condición automáticamente se verifica la primera, basta tomar en [2] $b = 1$.

La tercera condición se verifica cuando $r = 1/3$

Por tanto, la función potencial g es $g(x) = x^{1/3}$. Esta función se extiende a todo **R** de modo natural y se obtiene la función f definida por

$$f(x) = x^{1/3}$$

.15. Sean $\mathbf{V}$ un espacio vectorial sobre un cuerpo K, S un con-
o arbitrario y

$$M(S,\mathbf{V}) = \{f : S \longrightarrow V / f \text{ aplicación}\}$$

strar que la terna $(M(S,\mathbf{V}),+,.K)$ es un espacio vectorial, sien-
y .K las operaciones naturales inducidas por las de $\mathbf{V}$ en el
unto M(S,V).

LUCION :

Operación interna :

$$M(S;\mathbf{V}) \times M(S;\mathbf{V}) \xrightarrow{+} M(S;\mathbf{V})$$
$$(f,g) \longrightarrow f+g$$

donde $f + g : S \longrightarrow \mathbf{V}$ viene definida por $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$

El par $(M(S;\mathbf{V}),+)$ es un grupo conmutativo.

1) P. asociativa : $f + (g + h) = (f + g) + h$

En efecto , sea $x \in S$ entonces ,

$$(f + (g + h))(x) = f(x) + (g + h)(x) = f(x) + g(x) + h(x)$$
$$= (f + g)(x) + h(x)$$
$$= (f + g) + h)(x)$$

de donde se sigue que $f + (g + h) = (f + g) + h$.

2) El elemento neutro viene dado por la aplicación $0 : S \longrightarrow \mathbf{V}$ donde $0(x) = 0$, para todo x de S

$(f + 0)(x) = f(x) + 0(x) = f(x)$ de donde $f + 0 = f$

3) El elemento opuesto de f es -f definido por $(-f)(x) = -f(x)$

$(f + (-f))(x) = f(x) + (-f)(x) = f(x) - f(x) = 0(x)$, de donde

$$f + (-f) = 0$$

4) La conmutatividad es consecuencia de

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = g(x) + f(x) = (g + f)(x)$$

Operación externa :

$$K \times M(S;\mathbf{V}) \longrightarrow M(S;\mathbf{V})$$
$$(a\ ,\ f) \longrightarrow af$$

donde $af : S \longrightarrow \mathbf{V}$ viene definida por : $(af)(x) = af(x) = a.(f(x))$

La operación .K verifica las propiedades del espacio vectorial ,

5) $a(f + g) = af + ag$

6) $(a + b)f = af + bf$

7) $a(b(f)) = (ab)f$

8) $1.f = f$

La demostración de estas propiedades se hace como en la suma.

1.16. Sea G un grupo abeliano y K un cuerpo conmutativo; se define una operación externa en G de la siguiente forma :

"Para todo $a \in K$ y todo $x \in G$, $ax = 0$" .

Estudiar las condiciones que tiene que verificar G para que la terna (G,+,.K) sea un espacio vectorial.

SOLUCION :

a) Por ser G un grupo abeliano verifica los axiomas V1,V2,V3 y V4 de espacio vectorial.

b) Veamos que axiomas cumple la operación externa.

V5 : $a(x + y) = ax + ay$ ya que $a(x + y) = 0$ y $ax = 0$ y $ay = 0$, y , por tanto, $ax + ay = 0$

V6 : $(a + b)x = ax + bx$ ya que $(a + b)x = 0$ y $ax = 0$ y $bx = 0$, y , por tanto, $ax + by = 0$

V7 : $(ab)x = a(bx)$ ya que $(ab)x = 0$ y $a(bx) = a0 = 0$

V8 : $1x = 0$ luego no se verifica el axioma si G tiene elementos distintos de 0

Por tanto, (G,+,.K) es un espacio vectorial si, y solo si, G tiene un único elemento, es decir, G es el grupo cero.

1.17. Demostrar que la condición necesaria y suficientes para que la unión de dos subespacios vectoriales de $\mathbf{V}$ sea un subespacio vectorial es que uno de ellos esté contenido en el otro.

SOLUCION :

a) La condición es necesaria.

Sean W_1 y W_2 dos subespacios vectoriales de V cuya unión $W_1 \cup W_2$ sea un subespacio vectorial de V.

- Si $W_1 \subset W_2$ entonces ya está demostrado.
- Si $W_1 \not\subset W_2$ entonces existirá al menos un elemento $x \in W_1$ tal que $x \notin W_2$. Para todo $y \in W_2$ se tiene que $z = x + y \in W_1 \cup W_2$ por ser la unión de W_1 y W_2 un subespacio vectorial. Como $x \notin W_2$ también $z = x + y \notin W_2$, luego $z = x + y \in W_1$ de donde $y \in W_1$,y por tanto, $W_2 \subset W_1$
- Si $W_2 \subset W_1$ entonces de forma análoga se tiene que $W_1 \subset W_2$.

b) La condición es suficiente.

En efecto, si $W_1 \subset W_2$ entonces $W_1 \cup W_2 = W_2$

si $W_2 \subset W_1$ entonces $W_1 \cup W_2 = W_1$

y en ambos casos la unión es un subespacio vectorial.

1.18. Sea $\mathbf{V}$ un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbf{K}$.
Demostrar mediante un ejemplo que la unión de dos subespacios vectoriales, no es en general un subespacio vectorial.
Si $(\mathbf{W}_i)_{i \in I}$ es una familia de subespacios de $\mathbf{V}$, filtrante superiormente, es decir, tal que para todo $i,j \in I$ existe un $k \in I$ con $\mathbf{W}_i \subset \mathbf{W}_k$ y $\mathbf{W}_j \subset \mathbf{W}_k$, entonces $\bigcup_{i \in I} \mathbf{W}_i$ es un subespacio vectorial de $\mathbf{V}$.

OLUCION:

Sea $\mathbf{V} = \mathbf{R}^3$, $\mathbf{W}_1 = \{(x,y,z)/ x = y = 0\}$ y $\mathbf{W}_2 = \{(x,y,z) / z = 0\}$ entonces si $\mathbf{W}_1 \cup \mathbf{W}_2$ fuese un subespacio como $(0,0,1)$ y $(1,1,0)$ son vectores de $\mathbf{W}_1 \cup \mathbf{W}_2$ se verificaría que $(1,1,0) - (0,0,1) = (1,1,-1)$ es un vector de $\mathbf{W}_1 \cup \mathbf{W}_2$, lo que no es cierto ya que $(1,1,-1)$ no es un vector ni de $\mathbf{W}_1$ ni de $\mathbf{W}_2$,

Veamos ahora que $\bigcup_{i \in I} \mathbf{W}_i$ es un subespacio vectorial de $\mathbf{V}$.

a) Como $\mathbf{W}_i \neq \emptyset$, para todo i, entonces $\bigcup_{i \in I} \mathbf{W}_i \neq \emptyset$

b) Sean $x,y \in \bigcup_{i \in I} \mathbf{W}_i$, entonces existe un $i \in I$ tal que $x \in \mathbf{W}_i$, y existe un $j \in I$ tal que $y \in \mathbf{W}_j$, siendo la familia filtrante superiormente existe un $k \in I$ con $\mathbf{W}_i \subset \mathbf{W}_k$ y $\mathbf{W}_j \subset \mathbf{W}_k$, por tanto $x,y \in \mathbf{W}_k$.

Por ser $\mathbf{W}_k$ un subespacio vectorial se tiene : $x + y \in \mathbf{W}_k$ de donde $x + y \in \bigcup_{i \in I} \mathbf{W}_i$

c) Finalmente sea $a \in \mathbf{K}$ y $x \in \bigcup_{i \in I} \mathbf{W}_i$ entonces existe un $i \in I$ tal que $x \in \mathbf{W}_i$, de donde $ax \in \mathbf{W}_i$ y de aquí $ax \in \bigcup_{i \in I} \mathbf{W}_i$

De a), b), c) se deduce que $\bigcup_{i \in I} \mathbf{W}_i$ es un subespacio vectorial de $\mathbf{V}$

1.19. Poner en $(\mathbf{R}^2,+,.\mathbf{R})$ un ejemplo que demuestre que la unión e dos subespacios vectoriales no es en general un subespacio vecorial de $\mathbf{R}^2$.

OLUCION:

nsideremos el espacio vectorial $\mathbf{R}^2$ y en él los subespacios

$$W_1 = \{(x,0)/x \in \mathbf{R}\} \quad y \quad W_2 = \{(0,y)/y \in \mathbf{R}\}$$

vector $(1,0) \in \mathbf{W}_1$ y el vector $(0,1) \in \mathbf{W}_2$; si $W_1 \cup W_2$ fuese subespacio ectorial de $\mathbf{R}^2$ el vector $(1,0) + (0,1) = (1,1)$ pertenecería a la unión, contraicción con el hecho de que $(1,1)$ no pertenece a ninguno de los dos subespacios.

1.20. En el espacio vectorial $\mathbf{R}^4$ se considera el subconjunto

$$\mathbf{M} = \{ (x_1,x_2,x_3,x_4) \ / \ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$$

1°) Demostrar que $\mathbf{M}$ es un subespacio vectorial de $\mathbf{R}^4$.

2°) Encontrar en $\mathbf{M}$ tres vectores u,v,w que sean linealmente independientes, y demostrar que todo vector de $\mathbf{M}$ se puede poner como combinación lineal de u,v,w.

SOLUCION:

1° Veamos que M es un subespacio vectorial de $\mathbf{R}^4$.
Sean $x = (x_1,x_2,x_3,x_4)$ e $y = (y_1,y_2, y_3,y_4)$ dos elementos de $\mathbf{M}^4$, entonces,

$$x + y = (x_1 + y_1,\ x_2 + y_2,\ x_3 + y_3,\ x_4 + y_4) \quad , y$$

$$x_1 + y_1 + x_2 + y_2 + x_3 + y_3 + x_4 + y_4 =$$
$$= (x_1 + x_2 + x_3 + x_4) + (y_1 + y_2 + y_3 + y_4)$$
$$= 0 + 0 = 0 \ ,$$

luego, $x + y$ es un elemento de $\mathbf{M}$.

De $\quad ax = a(x_1 ,x_2 ,x_3 ,x_4) = (ax_1 , ax_2 , ax_3 , ax_4)$

y $\quad ax_1 + ax_2 + ax_3 + ax_4 = a(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) = a.0 = 0$

se sigue que ax es un elemento de $\mathbf{M}$.

Por tanto M es un subespacio vectorial de $\mathbf{R}^4$.

2° Los vectores
$$\begin{cases} u = (1,0,0,-1) \\ v = (0,1,0,-1) \\ w = (0,0,1,-1) \end{cases}$$
son elementos de $\mathbf{M}$ y linealmente independientes como se comprueba facilmente.

Sea $z = (z_1, z_2, z_3, z_4)$ un vector de $\mathbf{M}$, que por tanto verifica,
$0 = z_1 + z_2 + z_3 + z_4$.
Veamos si podemos poner z como combinación lineal de los vectores u,v,w.

$$z = au + bv + cw$$
$$= (z_1 ,z_2 ,z_3 ,z_4) = a(1,0,0,-1) + b(0,1,0,-1) + c(0,0,1,-1)$$
$$= (a,b,c,-a-b-c)$$

luego basta tomar, $a = z_1$, $b = z_2$, $c = z_3$

De los dos apartados anteriores se sigue que $(\mathbf{M},+,.\mathbf{R})$ es un subespacio vectorial de $\mathbf{R}^4$, de dimensión 3 ya que $B = (u,v,w)$ es una base de $\mathbf{M}$.

1.21. Sea **V** un espacio vectorial sobre un cuerpo **K**, $\mathscr{L}(V)$ el
njunto de todos los subespacios de **V**. Demostrar :

La relación $\leq$ definida en $\mathscr{L}(V)$ por

$$"W_1 \leq W_2 \Longleftrightarrow W_1 \cap W_2 = W_1"$$

es una relación de orden.

El par $(\mathscr{L}(V), \leq)$ es un retículo.

Si $W_1 \leq W_2$, entonces se verifica :

$$W_2 \cap (W + W_1) = (W_2 \cap W) + W_1$$

OLUCION :

a) $W_1 \leq W_1$ ya que $W_1 \cap W_1 = W_1$

b) • $W_1 \leq W_2 \Longrightarrow W_1 \cap W_2 = W_1$; • $W_2 \leq W_1 \Longrightarrow W_2 \cap W_1 = W_2$ y de aquí se deduce que $W_1 = W_2$

c) • $W_1 \leq W_2 \Longrightarrow W_1 \cap W_2 = W_1$; • $W_2 \leq W_3 \Longrightarrow W_2 \cap W_3 = W_2$ de donde se deduce :

$W_1 \cap W_3 = (W_1 \cap W_2) \cap W_3 = W_1 \cap (W_2 \cap W_3) = W_1 \cap W_2 = W_1$ de donde $W_1 \leq W_3$

De a),b),c) se deduce que $(\mathscr{L}(V), \leq)$ es una relación de orden.

) Para ver que $(\mathscr{L}(V), \leq)$ es un retículo basta demostrar que

a) $\sup(W_1,W_2) = W_1 + W_2$ y b) $\inf(W_1,W_2) = W_1 \cap W_2$

Veamos la demostración de la primera ,la otra es totalmente análoga.

De $W_1 \subset W_1 + W_2$ y $W_2 \subset W_1 + W_2$ se sigue que

- $W_1 \cap (W_1 + W_2) = W_1$ de donde $W_1 \leq W_1 + W_2$
- $W_2 \cap (W_1 + W_2) = W_2$ de donde $W_2 \leq W_1 + W_2$

Sea $H \in \mathscr{L}(V)$ tal que $W_1 \leq H$ y $W_2 \leq H$, entonces ,

- $W_1 \cap H = W_1$ y por tanto $W_1 \subset H$
- $W_2 \cap H = W_2$ y por tanto $W_2 \subset H$

como consecuencia de esto :

$W_1 + W_2 \subset H$, es decir, $(W_1 + W_2) \cap H = W_1 + W_2$, o lo que es lo mismo

$W_1 + W_2 \leq H$, luego $\sup(W_1,W_2) = W_1 + W_2$.

) Esta tercera propiedad de los retículos recibe el nombre también de postulado de Dedekind . Al ser una relación entre subespacios vectoriales como cojuntos se tratará de demostrar la igualdad de éstos.

a) Sea $z \in W_2 \cap (W + W_1)$ entonces $z \in W_2$ y $z \in W + W_1$ y por tanto $z = x + y$ con $x \in W$, $y \in W_1$.

Como $W_1 \leq W_2$ se tiene (1) $x = z - y \in W_2$ y ademas (2) $x \in W$ luego $x \in W_2 \cap W$

De todo esto se obtiene que $z = x + y$ con $x \in W_2 \cap W$, $y \in W_1$ es un elemento de $(W_2 \cap W) + W_1$, o lo que es lo mismo ,

$$W_2 \cap (W + W_1) \subset (W_2 \cap W) + W_1$$

b) Sea ahora $z \in (W_2 \cap W) + W_1$ entonces $z = x + y$ con $x \in W_2 \cap W$, $y \in W_1$

equivalente a decir que $x \in W_2$, $x \in W$, $y \in W_1$;

como $W_1 \leq W_2$, $y \in W_1$ entonces $y \in W_2$ y por tanto $z = x+y \in W_2$

y como además $x \in W$, $y \in W_1$ entonces obtenemos también : $z \in W+W_1$

y en consecuencia $z \in W_2 \cap (W + W_1)$,o lo que es lo mismo,

$$(W_2 \cap W) + W_1 \subset W_2 \cap (W + W_1)$$

De a) y b) se sigue la cuestión 3).

1.22. Sea $F(R,R)$ el espacio de todas las funciones de **R** en **R**. Estudiar si **W** es un subespacio de $F(R,R)$ donde :

i) $W = \{f \in F(R,R) / f(3) = 0\}$
ii) $W = \{f \in F(R,R) / f(1) = f(2)\}$
iii) $W = \{f \in F(R,R) / f(-x) = -f(x)\}$

SOLUCION :

i) $W \neq \emptyset$ ya que la función cero $f_o \in W$ puesto que $f_o(3) = 0$.

Si $f,g \in W$ entonces para todo $a,b \in R$ se tiene que

$$(af + bg)(3) = af(3) + bg(3) = a.0 + b.0 = 0$$

Luego, $af + bg \in W$ y por tanto **W** es un subespacio vectorial de $F(R,R)$.

ii) $W \neq \emptyset$ ya que la función cero $f_o \in W$ puesto que $f_o(1) = f(2) = 0$.

Si $f,g \in W$ entonces para todo $a,b \in R$ se tiene que

$$(af + bg)(1) = af(1) + bf(1) = af(2) + bf(2) = (af + bg)(2)$$

Luego, $af + bg \in W$ y por tanto **W** es un subespacio vectorial de $F(R,R)$.

iii) $W \neq \emptyset$ ya que la función cero $f_o \in W$ puesto que $f_o(-x) = 0 = -0 = -f_o(x)$.

Si $f,g \in W$ entonces para todo $a,b \in W$ se tiene que

$$(af + bg)(-x) = af(-x) + bg(-x) = -af(x) - bg(x) = -(af(x) + bg(x)) = -(af + bg)(x)$$

Luego, $af + bg \in W$ y por tanto **W** es un subespacio vectorial de $F(R,R)$.

1.23. Sea $\mathbf{V}$ un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbf{K}$. Demos-ar mediante un ejemplo que $(\mathscr{L}(\mathbf{V}), \leq)$ no es en general un tículo distributivo.

OLUCION:

a $\mathbf{V} = \mathbf{R}^2$, consideremos los subespacios vectoriales $W_1 = \{(x,y)/\ x = 0\}$ $W_2 = \{(x,y)\ /\ x = y\}$, y $W_3 = \{(x,y)\ /\ y = 0\}$ entonces se tiene:

- (a) $W_1 \cap (W_2 + W_3) = W_1 \cap R^2 = W_1$
- (b) $(W_1 \cap W_2) + (W_1 \cap W_3) = \{0\} + \{0\} = \{0\}$

Evidentemente los subespacios vectoriales de R^2 obtenidos en (a) y (b) no son iguales, luego la intersección $\cap$ no distribuye respecto de la suma $+$.

Análogamente se verifica :

- (a) $W_1 + (W_2 \cap W_3) = W_1 + \{0\} = W_1$
- (b) $(W_1 + W_2) \cap (W_1 + W_3) = R^2 \cap R^2 = R^2$

Evidentemente los subespacios vectoriales obtenidos en (a) y (b) no son iguales, luego la suma no distribuye respecto a la intersección.

los apartados 1) y 2) se deduce que $(\mathscr{L}(\mathbf{V}), \leq)$ o lo que es lo mismo $\mathscr{L}(V), +, \cap)$ no es un retículo distributivo.

1.24. Sea $S = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ un sistema libre y u el vector do por,

$$u = a_1u_1 + a_2u_2 + \ldots + a_nu_n$$

nde los coeficientes son todos no nulos. Demostrar que el sistema $= \{u_1, u_2, \ldots, u_{i-1}, u, u_{i+1}, \ldots, u_n\}$ es libre.

OLUCION:

remos la demostración por reducción al absurdo. Supongamos que S' es un siste ligado; por ser $S' - \{u\}$ un sistema libre u tiene que depender linealmente de s vectores de S', es decir,

$$u = b_1u_1 + b_2u_2 + \ldots + b_{i-1}u_{i-1} + b_{i+1}u_{i+1} + \ldots + b_nu_n$$
$$= b_1u_1 + b_2u_2 + \ldots + b_{i-1}u_{i-1} + 0u_i + b_{i+1}u_{i+1} + \ldots + b_nu_n$$

también, $u = a_1u_1 + a_2u_2 + \ldots + a_{i-1}u_{i-1} + a_iu_i + b_{i+1}u_{i+1} + \ldots + a_nu_n$

donde $a_i = 0$, contradicción. Por tanto, S' es un sistema libre.

1.25. Se considera el conjunto $\mathbf{V} = \{(x,y,y,-x)/x,y \in \mathbf{R}\}$ en el que se definen las siguientes operaciones:

$$(x,y,y,-x) + (z,t,t,-z) = (x+z,\ y+t,\ y+t,\ -(x+z))$$
$$k\,(x,y,y,-x) = (kx,ky,ky,-kx) \quad k \in \mathbf{R}$$

Demostrar que $\mathbf{V}$ con estas operaciones es un espacio vectorial.

SOLUCION:

Es evidente que $\mathbf{V}$ es un subconjunto del espacio vectorial $\mathbf{R}^4$. Para ver si $\mathbf{V}$ es un espacio vectorial, subespacio de $\mathbf{R}^4$, basta ver si cumple las dos condiciones de subespacio.

a) Sean $(x,y,y,-x)$, $(z,t,t,-z)$ dos elementos de $\mathbf{V}$, entonces,

$(x,y,y,-x) - (z,t,t,-z) = (x-z,y-t,y-t,-(x-z))$

es un elemento de $\mathbf{V}$. Por tanto $\mathbf{V}$ es un subgrupo de R^4.

b) Sean $(x,y,y,-x)$ un elemento de $\mathbf{V}$, y k un número real, entonces

$k(x,y,y,-x) = (kx,ky,ky,-kx)$

es un elemento de V.

De a) y b) se deduce que $\mathbf{V}$ es un espacio vectorial, subespacio de $\mathbf{R}^4$.

1.26. Se considera el subconjunto de los números reales dado por $\mathbf{W} = \{a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3}\ /\ a,b,c \in \mathbf{Q}\}$. Demostrar que $\mathbf{W}$ es un subespacio vectorial de $\mathbf{R}$ con las operaciones inducidas. Dar también una base y la dimensión.

SOLUCION:

1) Es evidente que $\mathbf{W}$ es un subconjunto no vacío de R. Para ver si $\mathbf{W}$ es un subespacio vectorial de $\mathbf{R}$, basta ver si se cumplen las dos condiciones de subespacio vectorial.

a) Sea $a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3}$ y $a' + b'\sqrt{2} + c'\sqrt{3}$ dos elementos de $\mathbf{W}$ entonces

$(a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3}) + (a' + b'\sqrt{2} + c'\sqrt{3}) = (a + a') + (b + b')\sqrt{2} + (c + c')\sqrt{3}$

que es un elemento de $\mathbf{W}$.

b) Sean $a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} \in \mathbf{W}$ y k un número real, entonces

$k\,(a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3}) = (ka) + (kb)\sqrt{2} + (kc)\sqrt{3}$

que es un elemento de $\mathbf{W}$

2) Una base de este subespacio vectorial es $B = (1, \sqrt{2}, \sqrt{3})$ como se comprueba inmediatamente. Por tanto, su dimensión es $Card(B) = 3$.

1.27. Sea **V** un espacio vectorial sobre **K** y S un subconjunto V. Se llama <u>cierre de S</u> al menor subespacio vectorial que contiene a S. Lo designaremos por **L**(S) o por ⟨S⟩ . Demostrar :

L(S) es la intersección de todos los subespacios de **V** que contienen a S.

L(S) es el conjunto de todas las combinaciones lineales finitas de elementos de S.

<u>OLUCION</u> :

Sea F la familia de todos los subespacios de V que contienen a S,dado que V ∈ F , F no es vacía. Sea $W = \bigcap_{F \in F} F$, si F ∈ F entonces S ⊂ **F**, siendo **F** un subespacio vectorial, por tanto $W = \bigcap_{F\in F} F$ es un subespacio vectorial y S ⊂ **W**.

Veamos que es el menor de los subespacios que contienen a **W**.

Si H es un subespacio vectorial de **W** tal que contiene a S ,entonces H ∈ F y por tanto $W = \bigcap_{F \in F} F \subset H$, de donde **W** es el menor subespacio de **V** que contiene a S y en consecuencia **W** = L(S).

Sea $U = \{ \sum a_i x_i \ / \ x_i \in S \}$ el conjunto de todas las combinaciones lineales finitas de elementos de S, entonces se verifica :

a) 0 ∈ **U** , ya que basta tomar todos los a_i nulos. Luego **U** ≠ ∅ .

b) Si x,y ∈ **U** con $x = \sum a_i x_i$, $y = \sum b_j x_j$, $x_i, x_j \in S$, entonces $x + y = \sum a_i x_i + \sum b_j x_j$ es una combinación lineal finita de elementos de S , luego x + y ∈ **U** .

c) Si x ∈ U , con $x = \sum a_i x_i$ y a ∈ K entonces se obtiene : $ax = a(\sum a_i x_i) = \sum (aa_i)x_i$ que es una combinación lineal finita de elementos de S.

De a),b) y c) se deduce que **U** es un subespacio de **V**.

d) Además si x ∈ S, x = 1.x es una combinación lineal finita de elementos de S, luego S ⊂ **U** .

e) Veamos ahora que **U** = **W** = **L**(S).

Si **H** es otro subespacio de **V** tal que S ⊂ **H** , entonces si x ∈ U $x = \sum a_i x_i$ con $x_i \in S$ y por tanto $x_i \in H$ de donde x ∈ **H** y finalmente **U** ⊂ H ,es decir, **U** es el menor subespacio de **V** que contiene a S .Así pues , **U** = **L**(S) = **W**

1.28. Sea **V** un espacio vectorial sobre un cuerpo **K**. Demostrar:

1) **L**(V) = **V** , **L**(∅) = {0}

2) S ⊊ T entonces **L**(S) ⊂ **L**(T), y recíprocamente.

3) **L**(**L**(S)) = **L**(S)

4) Si **W** es un espacio vectorial de **V** entonces **L**(**W**) = **W**

5) **L**(S ∪ T) = **L**(S) + **L**(T)

6) Si x ∈ **L**(S ∪ {y}) y x ∉ **L**(S) , entonces y ∈ **L**(S ∪ {x})

donde se indica con **L**(S) el cierre de S, es decir, el menor subespacio de **V** que contiene a S

<u>SOLUCION</u> :

1) Evidentemente los menores subespacios de **V** que contienen a **V** y ∅ son respectivamente **V** y {0} , luego **L**(V) = **V** y **L**(∅) = {0}

2) **L**(T) es un subespacio que contiene a T , por tanto a S, de aquí que como **L**(S) es el menor subespacio que contiene a S , se sigue **L**(S) ⊂ **L**(T).

4) Se demuestra ahora la propiedad 4) que luego utilizaremos.

Si **W** es un subespacio , el menor subespacio que contiene a **W** es precisamente **W** , luego **L**(**W**) = **W**.

Recíprocamente, si **W** = **L**(**W**) , como **L**(**W**) es un subespacio entonces también lo es **W**.

3) Como **L**(S) es un subespacio , por la propiedad 4) se sigue que **L**(**L**(S)) = **L**(S)

5) Los elementos de **L**(S ∪ T) son combinaciones lineales finitas de elementos de S ∪ T, es decir,elementos de S y de T.

Sea entonces , z un elementos de **L**(S ∪ T), entonces $z = \sum a_i x_i$, $x_i \in S \cup T$ asociando esta expresión mediante la asociatividad y conmutatividad de la suma de vectores en la forma ,

$$z = \sum_{x_i \in S} a_i x_i + \sum_{x_i \in T} a_i x_i$$

se sigue que z ∈ **L**(S ∪ T) ⟹ z = u + v , donde u ∈ **L**(S) y v ∈ **L**(T), decir, **L**(S ∪ T) ⊂ **L**(S) + **L**(T). El otro contenido es inmediato.

6) Si x ∈ **L**(S ∪ {y}) entonces $x = \sum a_i x_i + by$ con $x_i \in S$ y $a_i, b \in K$

b debe ser distinto de cero , pues de lo contrario se tendría : $x = \sum a_i x_i$ $x_i \in S$, luego x ∈ **L**(S) , contradicción con la hipótesis.

Siendo b ≠ 0 se tiene , $y = b^{-1}x + (\sum(-b^{-1}a_i x_i))$, con $x_i \in S$, es decir , y ∈ **L**(S ∪ {x})

1.29. Sea **V** un espacio vectorial sobre el cuerpo de los números reales en el que se verifican las siguientes relaciones:

$$\begin{cases} ax + by + cz = \vec{0} \quad , \; a,b,c \in \mathbf{R} \; ; \; x,y,z \in \mathbf{V} \\ ab \neq 0 \end{cases}$$

Demostrar que el subespacio vectorial engendrado por los vectores x,z es el mismo que el engendrado por y,z.

SOLUCION:

Se trata de demostrar que $\mathbf{L}(\{x,z\}) = \mathbf{L}(\{y,z\})$.

i) $\mathbf{L}(\{x,z\}) \subset \mathbf{L}(\{y,z\})$

En efecto, $ax + by + cz = \vec{0} \Rightarrow x = (-b/a)y + (-c/a)z$ ya que $a \neq 0$, y por tanto, x,z pertenecen a $\mathbf{L}(\{y,z\})$, luego el subespacio engendrado por x,z esta contenido en el subespacio engendrado por y,z.

ii) $\mathbf{L}(\{y,z\}) \subset \mathbf{L}(\{x,z\})$

En efecto, $ax + by + cz = \vec{0} \Rightarrow y = (-a/b)x + (-c/b)z$ ya que $b \neq 0$, por tanto, y,z pertenecen a $\mathbf{L}(\{x,z\})$, luego el subespacio engendrado por y,z está contenido en el subespacio engendrado por x,z.

De i) y ii) se deduce el enunciado.

1.30. Sea **V** un espacio vectorial sobre un cuerpo **K**, $x,y \in \mathbf{V}$, con $x \neq 0$ e $y \neq 0$.

Demostrar que $\mathbf{L}(\{x\}) = \mathbf{L}(\{y\})$ si y solo si $x = ay$, $a \neq 0$.

Dar una interpretación geométrica de este resultado.

SOLUCION:

a) Si $\mathbf{L}(\{x\}) = \mathbf{L}(\{y\})$ entonces se tiene que $x \in \mathbf{L}(\{y\})$ y por tanto x es una combinación lineal de y, es decir, $x = ay$, con $a \neq 0$,pues sino $x = 0.y = 0$, contradicción con la hipótesis de $x \neq 0$

b) Recíprocamente , sea $z \in \mathbf{L}(\{x\})$, entonces $z = bx$, y por tanto,

$z = bx = b(ay) = (ba)y$ de donde $z \in \mathbf{L}(\{y\})$.

Por consiguiente , $\mathbf{L}(\{x\}) \subset \mathbf{L}(\{y\})$ (1)

Análogamente , si $z \in \mathbf{L}(\{y\})$ entonces $z = cy$, y por tanto ,

$z = cy = c(a^{-1}x) = (ca^{-1})x$ de donde $z \in \mathbf{L}(\{x\})$.

Por consiguiente , $\mathbf{L}(\{y\}) \subset \mathbf{L}(\{x\})$ (2)

De las relaciones (1) y (2) se tiene finalmente que $\mathbf{L}(\{x\}) = \mathbf{L}(\{y\})$.

Geométricamente esto significa que dos rectas vectoriales son iguales si,y solo si,un vector arbitrario no nulo de ellas es proporcional a un vector cualquiera no nulo de la otra.

1.31. Sea $\mathbf{R}^3$ el espacio vectorial numérico tridimensional, se consideran los subespacios vectoriales engendrados por los vectores

$u = (1,2,1)$, $v = (1,3,2)$

y

$x = (1,1,0)$, $y = (3,8,5)$

Demostrar que $\mathbf{L}(\{u,v\}) = \mathbf{L}(\{x,y\})$

SOLUCION:

Los subespacios engendrados son iguales si $x,y \in \mathbf{L}(\{u,v\})$ y $u,v \in \mathbf{L}(\{x,y\})$:

i) Los vectores x,y dependen linealmente de u y v

a) $(1,0,0) = a(1,2,1) + b(1,3,2)$
$= (a,2a,a) + (b,3b,2b)$
$= (a + b,2a + 3b,a + 2b)$

de donde ,

$$\left.\begin{array}{l} 1 = a + b \\ 1 = 2a + 3b \\ 0 = a + 2b \end{array}\right\} \Rightarrow \text{resolviendo el sistema} \quad (a,b) = (2,-1)$$

es decir, $x = 2u - v$

b) $(3,8,5) = a(1,2,1) + b(1,3,2)$
$= (a + b,2a + 3b,a + 2b)$

de donde ,

$$\left.\begin{array}{l} 3 = a + b \\ 8 = 2a + 3b \\ 5 = a + 2b \end{array}\right\} \Rightarrow \text{resolviendo el sistema} \quad (a,b) = (1,2)$$

y por tanto , $y = u + 2v$

ii) Los vectores u y v dependen linealmente de x,y

Este apartado se puede hacer de forma análoga al anterior, pero resulta más rápido resolver el sistema

$$\begin{cases} x = 2u - v \\ y = u + 2v \end{cases}$$

Haciéndolo resulta :

$$\begin{cases} u = \frac{2}{5}x + \frac{1}{5}y \\ v = -\frac{1}{5}x + \frac{2}{5}y \end{cases}$$

De i) y ii) se sigue que los subespacios vectoriales $\mathbf{L}(\{u,v\})$ y $\mathbf{L}(\{x,y\})$ son iguales.

1.32. Sea **V** un espacio vectorial de dimensión finita. Demostrar que las condiciones siguientes son equivalentes :

1) dim **V** = n
2) mín { card(S) / S sistema generador de **V** } = n
3) máx { card(L) / L sistema linealmente independiente de **V**} = n

S O L U C I O N :

1) $\Longrightarrow$ 2)

Si dim **V** = n , existe una base B con cardinal n, es decir un sistema de generadores con cardinal n.
Sea T un conjunto de generadores de **V** con cardinal de T menor que n, entonces si $x \in T$, $x \neq 0$, el conjunto $L = \{x\}$ es linealmente independiente luego existe una base B' de V tal que

$$L \subset B' \subset T$$

por tanto, $\text{card}(B') \leq \text{card}(T) < n = \text{card}(B)$

que contradice el hecho de que todas las bases tienen el mismo número de elementos , por consiguiente ,

$$\text{mín}\,\{\text{card}(S) \;/\; S \text{ sistema de generadores de } \mathbf{V}\} = n$$

2) $\Longrightarrow$ 3)

Sea S un sistema de generadores de **V** tal que card(S) = n , entonces S es un conjunto de vectores linealmente independientes , ya que si ,

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = 0 \quad , x_i \in S$$

y no todos los a_i nulos , entonces si por ejemplo , $a_r \neq 0$, $0 < r \leq n$,

$$x_r = (-a_r^{-1}a_1)x_1 + (-a_r^{-1}a_2)x_2 + \ldots + (-a_r^{-1}a_{r-1})x_{r-1} + (-a_r^{-1}a_{r+1})x_r + \ldots + (-a_r^{-1}a_n)x_n$$

y el conjunto $S' = S - \{x_r\}$ sería un sistema generador de V con card(S') < card(S) lo que contradice la minimalidad de S.
Resulta entonces que S es una base y si existiese un conjunto de vectores linealmente independientes L con card(L) > n , se tendría una base B tal que

$$L \subset B' \subset S$$

y por tanto $\text{card}(B) \geq \text{card}(L) > n = \text{card}(S)$,

lo que contradice que todas las bases tienen el mismo número de elementos.

3) $\Longrightarrow$ 1)

Sea L un conjunto de vectores linealmente independientes tal que card(L)= n es máximo.
Entonces el conjunto $L' = L \cup \{x\}$ no puede ser linealmente independiente para ningún x no perteneciente a L, luego existen escalares no todos nulos tales que :

$$ax + a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = 0 \quad , \quad x_1, x_2, \ldots, x_n \in L$$

y como $a \neq 0$ (pues sino $a_1x_1 + a_ax_2 + \ldots + a_nx_n = 0$ implica que $a_i = 0$ para todo i) se tiene que :

$$x = (-a^{-1}a_1)x_1 + (-a^{-1}a_2)x_2 + \ldots + (-a^{-1}a_n)x_n \quad ,$$

es decir, L es un sistema de generadores de V , y por tanto una base de **V** , de aquí que dim **V** = card(L) = n

1.33. 1) Hallar el número de bases del espacio vectorial K^2, siendo $K = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

2) Hallar el número de bases del espacio vectorial K^3 siendo $K = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

3) Hallar el número de bases del espacio vectorial K^2 siendo $K = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

S O L U C I O N :

1) El espacio vectorial K^2 tiene 4 vectores : $(\bar{0},\bar{0}),(\bar{0},\bar{1}),(\bar{1},\bar{0}),(\bar{1},\bar{1})$ .Siendo K^2 un espacio vectorial de dimensión 2, se trata de hallar dos vectores linealmente independientes. Sea la base B = (x,y).

a) El vector x puede elegirse de tres maneras diferentes. $x \neq (\bar{0},\bar{0})$

b) El vector y puede elegirse a continuación de 2 formas diferentes.

Por tanto, el número de bases es : 3.2 = 6

2) El espacio vectorial K^3 tiene $2^3 = 8$ elementos, y son :
$(\bar{0},\bar{0},\bar{0}),(\bar{0},\bar{0},\bar{1}),(\bar{0},\bar{1},\bar{0}),(\bar{0},\bar{1},\bar{1}),(\bar{1},\bar{0},\bar{0}),(\bar{1},\bar{0},\bar{1}),(\bar{1},\bar{1},\bar{0}),(\bar{1},\bar{1},\bar{1})$
Siendo K^3 un espacio vectorial de dimensión 3, el problema se reduce a hallar todas las ternas posibles de vectores linealmente independientes.
Sean x,y,z los tres vectores de una base.

a) El vector x se puede elegir de 7 maneras diferentes, ya que el vector (0,0,0) no puede entrar en una base.

b) Elegido x, el segundo vector y se puede elegir, por tanto, de 6 maneras distintas ya que debe ser distinto de $\vec{0}$ y x.

c) Elegidos x,y , el tercer vector z tiene que ser distinto de los vectores

$$\vec{0} \;,\; x \;,\; y \;,\; x + y$$

que son las posibles combinaciones con los vectores x,y; en consecuencia el número de posibilidades de elegir z es 4.

De a),b) y c) se deduce que el número bases de K^3 es : 7.6.4 = 168

3) El espacio vectorial K^2 tiene $3^2 = 9$ elementos, y son :
$(\bar{0},\bar{0}),(\bar{0},\bar{1}),(\bar{0},\bar{2}),(\bar{1},\bar{0}),(\bar{1},\bar{1}),(\bar{1},\bar{2}),(\bar{2},\bar{0}),(\bar{2},\bar{1}),(\bar{2},\bar{2})$
Siendo K^2 un espacio vectorial de dimensión 2, el problema se reduce a hallar todos los pares posibles de vectores linealmente independientes.
Sea x,y los vectores de una base,

a) El vector x se puede elegir de 8 maneras distintas. El vector $\vec{0}$ no entra.

b) Elegido x, el segundo vector y tiene que ser distinto de los vectores

$$\vec{0} \;,\; x \;,\; 2x$$

que son las posibles combinaciones con x; en consecuencia el número de posibilidades de elegir y es 9-3 = 6.

De a) y b) se deduce que el número de bases distintas en K^2 es : 8.6 = 48

1.34. En $\mathbf{R}^4$ encontrar las ecuaciones paramétricas del subespacio vectorial $\mathbf{W}$ engendrado por el conjunto S de vectores :

$$S = \{(1,-1,0,0)\ ,\ (0,1,1,0)\ ,\ (2,-1,1,0)\ ,(3,-3,0,0)\}$$

¿Pertenece el vector (1,1,1,0) al subespacio vectorial $\mathbf{W}$?

S O L U C I O N :

1 Dado que $\mathbf{W} = \mathbf{L}(S)$, S sistema de generadores de $\mathbf{W}$,para encontrar las ecuaciones de $\mathbf{W}$ tendremos que encontrar una base de $\mathbf{W}$,para lo que es suficiente extraer de S un sistema maximal de vectores linealmente independientes. Procederemos por el método de reducción en "cascada".

$$\left\{\begin{array}{l} x_1 = (1,-1,0,0) \\ x_2 = (0,1,1,0) \\ x_3 = (2,-1,1,0) \\ x_4 = (3,-3,0,0) \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{ll} y_1 = (1,-1,0,0) & = x_1 \\ y_2 = (0,1,1,0) & = x_2 \\ y_3 = (0,1,1,0) & = x_3 - 2x_1 = x_2 \\ y_4 = (0,0,0,0) & = x_4 - 3x_1 \end{array}\right.$$

siendo los vectores y_1,y_2 linealmente independientes lo mismo sucede con los vectores x_1,x_2 , luego una base de $\mathbf{W}$ es $B = \{x_1,x_2\}$

2 Las ecuaciones paramétricas del subespacio vectorial $\mathbf{W}$ se obtienen así:

$x \in \mathbf{W}$ si y solo si $x = a_1x_1 + a_2x_2$, por tanto ,

$$x = (x^1,x^2,x^3,x^4) = a_1(1,-1,0,0) + a_2(0,1,1,0)$$
$$= (a_1,-a_1,0,0) + (0,a_2,a_2,0) \quad ,\ \text{de donde ,}$$

$$\left.\begin{array}{l} x^1 = a_1 \\ x^2 = -a_1 + a_2 \\ x^3 = a_2 \\ x^4 = 0 \end{array}\right\} \quad \text{Ecuaciones paramétricas de } \mathbf{W}.$$

3 Veamos ahora si el vector (1,1,1,0) es un elemento de $\mathbf{W}$.
Si $(1,1,1,0) \in \mathbf{W}$ existen dos números a_1 y a_2 tales que :

$$\left.\begin{array}{l} 1 = a_1 \\ 1 = -a_1 + a_2 \\ 1 = a_2 \\ 0 = 0 \end{array}\right\}$$

Puesto que este sistema no tiene solución,no existen tales números a_1 y a_2, luego,el vector (1,1,1,0) no pertenece al subespacio vectorial $\mathbf{W}$.

1.35. Se considera el subconjunto P_a de $\mathbf{R}^n$ formado por todas las n-tuplas de números reales ,tales que los elementos de cada n-tupla forman una progresión aritmética de orden uno.

a) Demostrar que P_a es un subespacio vectorial de $\mathbf{R}^n$.

b) Determinar la base canónica del mismo y su dimensión.

c) Calcular,respecto de la base canónica,las coordenadas del vector (6,9,12,...,3n+3).

S O L U C I O N :

a) P_a es un subespacio vectorial ya que :

i) Si $(a,a+d,a+2d,\dots,a+(n-1)d)$ y $(b,b+d',b+2d',\dots,b+(n-1)d)$ son dos elementos de P_a , entonces su suma

$$(a+b,(a+b)+(d+d'),(a+b)+2(d+d'),\dots,(a+b)+(n-1)(d+d'))$$

es también un elemento de P_a pues sus términos forman una progresión aritmética de razón $d+d'$.

ii) Si $(a,a+d,a+2d,\dots,a+(n-1)d)$ es un elemento de P_a y k un número real, entonces su producto

$$(ka,ka + kd\ ,ka + 2kd,\dots,ka + (n-1)kd)$$

es también un elemento de P_a pues sus términos forman una progresión aritmética de razón kd.

b) Se tiene :

$$(a,a+d,a+2d,\dots,a+(n-1)d) = (a,a,a,\dots,a) + (0,\ d,\ 2d,\dots,\ (n-1)d)$$
$$= a(1,1,1,\dots,1) + d(0,1,2,\dots,n-1)$$

El par $((1,1,1,\dots,1),(0,1,2,\dots,n-1))$ es una base de P_a puesto que son linealmente independientes y generadores de P_a .

Esta base se llama canónica porque respecto de ella las coordenadas de una progresión son el primer término y la razón.

c) Teniendo en cuenta lo anterior, las coordenadas del vector (6,9,12,...,3n+3) respecto de la base canónica son (6,3) ya que el primer término es 6 y la razón 3.

En efecto ,

$$(6,9,12,\dots,3n+3) = (6,6,6,\dots,6) + (0,3,6,\dots,(n-1)3)$$
$$= 6(1,1,1,\dots,1) \quad 3(0,1,2,\dots,n-1)$$

Por tanto, las coordenada son (6,9).

Este resultado es de sobra conocido,ya que toda progresión aritmética queda determinada por el primer término a_1 y la razón d.

Recordemos que el término general de una progresión aritmética es :

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

1.36. Se considera el subconjunto P de R^N formado por todas las sucesiones aritméticas de orden uno.

a) Demostrar que P es un subespacio vectorial de R^N.

b) Determinar la base canónica del mismo y su domensión.

c) Calcular, respecto de la base canónica, las coordenadas de la sucesión aritmética (1,3,5,7,9,11,...)

S O L U C I O N :

a) El conjunto de las progresiones aritméticas de orden uno con las operaciones inducidas . En efecto :

i) Si $(a_n)_{n\in \mathbf{N}}$ y $(b_n)_{n\in \mathbf{N}}$ son dos sucesiones de P con $a_n = a_1 + (n-1)d$ y $b_n = b_1 + (n-1)d'$ entonces su suma

$$(a_n + b_n)_{n\in \mathbf{N}} \quad \text{con} \quad a_n + b_n = (a_1 + b_1) + (n-1)(d+d')$$

es también un elemento de P pues sus términos forman una progresión aritmética de razón $d+d'$ y primer término a_1+b_1 .

ii) Si $(a_n)_{n\in \mathbf{N}}$ es un elemento de P con $a_n = a_1 + (n-1)d$ y k un número real entonces su producto

$$(ka_n)_{n\in \mathbf{N}} \quad \text{con} \quad ka_n = ka_1 + (n-1)kd$$

es también un elemento de P pues sus términos forman una progresión aritmética de razón kd y primer término ka_1.

b) Se tiene :

$$(a_n)_{n\in \mathbf{N}} = (a_1 + (n-1)d) = (a_1) + ((n-1)d)_{n\in \mathbf{N}}$$
$$= a_1(1) + d(n-1)_{n\in \mathbf{N}}$$

Por tanto, el par $((1),(n-1)_{n\in \mathbf{N}})$ es una base de P puesto que son linealmente independientes y generadores de P.

Esta base se llama canónica porque respecto de ella las coordenadas de una progresión son el primer término y la razón.

c) Teniendo en cuenta lo anterior, las coordenadas de la sucesión aritmética de orden uno , (1,3,5,7,8,11,...) son (1,2) ya que el primer término es 1 y la razón 2.

NOTA: Los resultados de este ejercicio y del anterior no son válidos para las progresiones geométricas. En efecto, consideremos las propgresiones geométricas : (1,2,4,8,16,...) y (1,3,9,27,81,...)

su suma es : (2,5,13,35,97,...)

que no es una progresión geométrica ya que $\frac{5}{2} \neq \frac{13}{5}$

1.37. Sea $\mathbf{V}$ un espacio vectorial de dimensión finita sobre un cuerpo $\mathbf{K}$, y $B = (u_1,u_2, \dots , u_n)$ una base de $\mathbf{V}$.

Demostrar que si x es un vector de $\mathbf{V}$ no nulo existe un índice r, $1 \leq r \leq n$, tal que

$$B' = (u_1,u_2,\dots,u_{r-1}, x , u_{r+1}, \dots ,u_n)$$

es una nueva base de $\mathbf{V}$.

S O L U C I O N :

Sea $x = a_1u_1 + a_2u_2 + \dots + a_nu_n$, entonces no todos los a_i son nulos, pues en este caso el vector x sería cero.

Entonces, existe al menos un coeficiente de índice r , $1 \leq r \leq n$, tal que $a_r \neq 0$.

Multiplicando por a_r^{-1} y despejando u_r se tiene : $u_r = a_r^{-1}x + \sum_{i\neq r}(-a_r^{-1}a_i)u_i$, (1)

Sea $B' = (u_1,u_2,\dots,u_{r-1},x,u_{r+1},\dots,u_n)$, entonces B' es una base de V.

1 Los vectores de B' son linealmente independientes.

Sea $\sum_{i\neq r} b_iu_i + bx = 0$; si $b \neq 0$ entonces x sería combinación lineal de los vectores de la base u_i, con $i \neq r$, y sustituyendo en la expresión (1) el vector x , u_r sería combinación lineal de los vectores u_i , con $i \neq r$, contradiciendo el hecho de ser B una base de V y por tanto linealmente independientes, luego debe ser $b = 0$.

Si $b = 0$, entonces $\sum_{i\neq r} b_iu_i = 0$ implica que $b_i = 0$, para todo i.

Consecuencia : Los vectores de B' son linealmente independientes.

2 $\mathbf{L}(B')$ es un subespacio de $\mathbf{V}$,pero teniendo como generador un conjunto de n vectores linealmente independientes se sigue que $\dim_K \mathbf{L}(B') = n$

De $\dim_K \mathbf{V} = \dim_K \mathbf{L}(B') = n$ se tiene que $\mathbf{V} = \mathbf{L}(B')$, y por tanto B' es un sistema de generadores de $\mathbf{V}$.

1.38. Sea $\mathbf{R}^4$ el espacio vectorial numérico de dimensión 4 sobre el cuerpo de los números reales. Dados los vectores ,

$$v_1 = (1,1,1,1) , v_2 = (1,0,0,1) , v_3 = (3,2,2,3)$$

se pide :

a) Comprobar si son linealmente dependientes.

b) Completar el subconjunto de vectores independientes de esos dados con vectores de la base canónica hasta obtener una nueva base del espacio vectorial $\mathbf{R}^4$.

1.39. Sea **V** un espacio vectorial sobre un cuerpo **K** y $x_1, x_2, \dots x_n$ elementos de **V**. Supongamos que $x_1, x_2, \dots, x_r$ son linealmente independientes y que se tienen las relaciones

$$x_j = \rho_{j1}x_1 + \rho_{j2}x_2 + \dots + \rho_{jr}x_r \quad , \; r+1 \leq j \leq n$$

Sea

$$W = \{(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in K^n / \sum_1^n \lambda_i x_i = 0\}$$

Demostrar que los elementos

$$z_j = (\rho_{j1}, \dots, \rho_{jr}, 0, \dots, 0, -1, 0, \dots, 0) \quad , r+1 \leq j \leq n$$

donde el -1 ocupa el lugar j, forman una base de **W**, de aquí que $\dim_K W = n-r$.

SOLUCION:

Sea $\sum_{j=r+1}^{n} \xi_j z_j = 0 \Rightarrow \sum_{j=r+1}^{n} \xi_j(\rho_{j1}, \dots, \rho_{jr}, 0, \dots, 0, -1, 0, \dots, 0) = 0$

$$\Rightarrow \sum_{j=r+1}^{n} (\xi_j\rho_{j1}, \dots, \xi_j\rho_{jr}, 0, \dots, 0, -\xi_j, 0, \dots, 0) = 0$$

$$\Rightarrow \left(\sum_{j=r+1}^{n} \xi_j\rho_{j1}, \dots, \sum_{j=r+1}^{n} \xi_j\rho_{jr}, -\xi_{r+1}, \dots, -\xi_j, 0, \dots, 0\right) = 0$$

$$\Rightarrow \text{para todo } j, \; r+1 \leq j \leq n \; , \; \xi_j = 0$$

por tanto los z_j son linealmente independientes.

Sea $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in W$, entonces

$$\sum_1^n \lambda_j x_j = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{r} \lambda_i x_i = -\sum_{j=r+1}^{n} \lambda_j x_j = -\sum_{j=r+1}^{n} \lambda_j\left(\sum_{i=1}^{r} \rho_{ji}x_i\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{r}\left(\sum_{j=r+1}^{n} \lambda_j\rho_{ji}\right)x_i$$

y como los x_i son linealmente independientes se tiene para $1 \leq i \leq r$

$$\lambda_i = \sum_{j=r+1}^{n} \lambda_j\rho_{ji}$$

entonces,

$$(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r, \lambda_{r+1}, \dots, \lambda_n) = \left(\sum_{j=r+1}^{n} \lambda_j\rho_{j1}, \dots, \sum_{j=r+1}^{n} \lambda_j\rho_{jr}, \lambda_{r+1}, \dots, \lambda_n\right)$$

$$= \sum_{j=r+1}^{n} \lambda_j(\rho_{j1}, \dots, \rho_{jr}, 0, \dots, 0, -1, \dots, 0)$$

luego los vectores forman un sistema de generadores y por tanto una base de **W**, como hay $n-r$ se tiene que $\dim_K W = n-r$

1.40. Si x, y, z son vectores linealmente dependientes de **V**,

a) ¿se puede asegurar que x depende linealmente de los otros dos?.

b) ¿se puede asegurar que uno de los tres vectores es combincación lineal de los otros dos?.

Razonar la contestación.

SOLUCION:

Si x, y, z son vectores linealmente dependientes de V, existen tres escalares a, b y c, no todos nulos, tales que,

$$ax + by + cz = \vec{0}$$

a) Si $a = 0$, $b \neq 0$ y $c \neq 0$, los vectores son linealmente dependientes pero x no es combinación lineal de los otros dos.

b) Los escalares a, b y c no pueden ser los tres nulos, y por tanto, tampoco dos de ellos. Si por ejemplo $b \neq 0$, entonces

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}z \quad ,$$

es decir, y es combinación lineal de los otros dos.

En resumen, la proposición primera es falsa y la segunda verdadera.

1.41. Sean **V** un espacio vectorial sobre un cuerpo **K**, **W** un subespacio de **V**, $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ una base de **W**.

Demostrar que si x es un vector de **V** que no pertenece a **W** entonces $\{u_1, u_2, \dots, u_n, x\}$ es un conjunto de vectores linealmente independiente.

SOLUCION:

Se trata de demostrar que

$$a_1u_1 + a_2u_2 + \dots + a_nu_n + a_{n+1}x = 0 \Rightarrow a_1 = a_2 = \dots = a_n = a_{n+1} = 0$$

i) $a_{n+1} \neq 0$

En este caso x es una combinación lineal de $u_1, u_2, \dots, u_n$, y por tanto, pertenece al subespacio **W**, contradicción.

ii) $a_{n+1} = 0$

En este caso resulta que

$$a_1u_1 + a_2u_2 + \dots + a_nu_n = 0$$

y por ser $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ una base de **W**, $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$

De i) y ii) se deduce que $a_1 = a_2 = a_3 = \dots = a_n = a_{n+1}$, y en consecuencia $\{u_1, u_2, \dots, u_n, x\}$ es un conjunto de vectores linealmente independiente.

1.42. Demostrar que la condición necesaria y suficiente para que los vectores (a,b) y (c,d) de $\mathbb{R}^2$ formen una base es que

$$ad - bc \neq 0$$

SOLUCION :

Sean p = " los vectores (a,b) y (c,d) son linealmente independientes"

y q = " ad - bc ≠ 0 "

entonces $(p \Longleftrightarrow q) \Longleftrightarrow (\text{no } p \Longleftrightarrow \text{no } q)$

Por tanto,este ejercicio es equivalente a demostrar que "dos vectores (a,b) y (c,d) son linealmente dependientes si, y solamente si, ad - bc = 0".

i) no p ⇒ no q

Si los vectores (a,b) y (c,d) son linealmente dependientes se tiene entonces que,por ejemplo,

$$(a,b) = \lambda(c,d) \ , \text{ con } \lambda \neq 0$$

de donde $(a,b) = (\lambda c, \lambda d) \Longleftrightarrow a = \lambda c \ , \ b = \lambda d$

$\Longleftrightarrow a\lambda d = \lambda cb$

$\Longleftrightarrow ad - bc = 0$

ii) no q ⇒ no q

a) Si (a,b) = (0,0) entonces es evidente que los dos vectores son linealmente dependientes.

b) Si (a,b) ≠ (0,0) entonces a ≠ 0 o bien b ≠ 0.Supongamos que es a.

Se tiene entonces que d = bc/a , luego

$$(c,d) = (c,bc/a) = (a,b)\cdot\frac{c}{a}$$

y los vectores dados son linealmente dependientes.

1.43. Dados los vectores u = (1,1,0,m) , v = (3,-1,n,-1) y w = (-3, 5,m,-4), hallar los valores de m y n para que dichos vectores sean linealmente dependientes.

SOLUCION :

Si los vectores son linealmente dependientes,uno de ellos,al menos,puede expresarse como combinación lineal de los restantes.

Veamos si el vector u puede expresarse como combinación lineal de v y w. En este caso : u = av + bw . Sustituyendo se obtiene el sistema

$$\left.\begin{array}{l} 1 = 3a - 3b \\ 1 = -a + 5b \\ 0 = na + bm \\ m = -a - 4b \end{array}\right\} \text{ y resolviendo el sistema : } \left\{\begin{array}{l} a = 2/3 \\ b = 1/3 \\ m = -2 \\ n = 1 \end{array}\right.$$

Por tanto, los valores pedidos son : m = -2 y n = 1.

1.44. En un espacio vectorial **V** sobre el cuerpo de los números complejos **C** se dan tres vectores a,b,y c , y se tiene que

$$u = b + c \ , \ v = c + a \ , \ w = a + b$$

1°) Probar que los subespacios vectoriales engendrados por a,b,c y por u,v,w son idénticos.

2°) Demostrar que los vectores u,v,w son linealmente independientes si y solo si a,b,c son linealmente independientes.

3°) ¿Son ciertos los resultados anteriores si se sustituye el cuerpo **C** por otro cuerpo cualquiera **K**?.

¿Cómo debe ser la característica de **K**?.

SOLUCION :

1°) Los vectores u,v,w son combinaciones lineales de a,b,c , luego pertenecen al subespacio vectorial **F** engendrado por a,b,c , y por tanto,el subespacio vectorial **G** engendrado por u,v,w está contenido en **F** (Toda combinación lineal de u,v,w es una combinación lineal de los vectores a,b,c.)

Por otra parte,despejando a,b, y c se tiene :

$$a = \frac{w + v - u}{2} \quad , \quad b = \frac{u + w - v}{2} \quad , \quad c = \frac{u + v - w}{2}$$

Los vectores a,b,c son combinaciones lineales de los vectores u,v,w , luego, por el mismo razonamiento que antes , el subespacio vectorial **F** está contenido en el subespacio vectorial **G**.

De $F \subset G$ y $G \subset F$ se sigue que $F = G$

2°) Si los vectores a,b,c son linealmente independientes entonces,

$$\dim_C F = 3$$

Como los subespacios F y G son idénticos se tiene que ,

$$\dim_C G = 3$$

Luego,los vectores u,v,w son linealmente independientes.

El mismo razonamiento se podía haber hecho a la inversa.

3°) Los razonamientos anteriores no son válidos si el cuerpo base de escalares tiene por característica 2. Nótese que que en 1°) hemos dividido por 2 que no tiene sentido si la característica es 2.

Además si la característica es 2, los vectores u,v y w son linealmente dependientes, ya que

$$(b + c) + (c + a) + (a + c) = 2(a + b + c) = 0$$

y los coeficientes de esta combinación lineal no son nulos.

1.45. Sean a,b,c tres números reales cualesquiera, demostrar que los vectores (1,a,b),(0,1,c) y (0,0,1) de $\mathbf{R}^3$ forman una base.

SOLUCION:

Teniendo una base de $\mathbf{R}^3$ tres vectores, el problema se reduce a demostrar que los vectores dados son linealmente independientes.

$$\lambda(1,a,b) + \mu(0,1,c) + \nu(0,0,1) = (0,0,0) \quad \Rightarrow \quad (\lambda, \lambda a + \mu, \lambda b + \mu c + \nu) = (0,0,0)$$

de donde resulta el sistema : $\begin{cases} \lambda = 0 \\ \lambda a + \mu = 0 \\ \lambda b + \mu c + \nu = 0 \end{cases}$

del que se obtiene $\lambda = \mu = \nu = 0$

Luego los vectores son linealmente independientes, y por tanto forman una base de $\mathbf{R}^3$.

1.46. En $\mathbf{R}^3$ se tiene una base $B = (x_1, x_2, x_3)$ y un vector x cuyas coordenadas respecto a B son : 1,-1,2.

1° Demostrar que el conjunto $S = \{x_1 + x_2 , x_1 + x_2 + x_3\}$ es linealmente independiente.

2° Completar S a una base B' tal que las coordenadas de x respecto a B' sean 1,1,1 .

SOLUCION:

1°
$$a_1(x_1 + x_2) \quad a_2(x_1 + x_2 + x_3) = 0$$
$$\Longleftrightarrow \quad (a_1 + a_2)x_1 + (a_1 + a_2)x_2 + a_2 x_3 = 0 \quad \text{de donde} \quad \begin{cases} a_1 + a_2 = 0 \\ a_2 = 0 \end{cases}$$

por ser B una base .Entonces se tiene que $a_1 = a_2 = 0$, y por tanto los vectores de S son linealmente independientes.

2° Sea $B' = \{x_1 + x_2 , x_1 + x_2 + x_3 , u\}$,entonces ,

$$x = x_1 - x_2 + 2x_3 \qquad \text{en la base B}$$
$$= (x_1 + x_2) + (x_1 + x_2 + x_3) + u \qquad \text{en la base B'}$$

entonces $u = -x_1 - 3x_2 + x_3$.

Se puede comprobar fácilmente que los vectores ,

$$B' = \{x_1 + x_2 , x_1 + x_2 + x_3 , -x_1 - 3x_2 + x_3\}$$

son linealmente independientes y por tanto forman una base de $\mathbf{R}^3$.

1.47. Comprobar si los vectores (1,2,3) ,(4,5,6) y (7,8,9) de $\mathbf{R}^3$ son linealmente dependientes o no.

SOLUCION:

$$(7,8,9) = a(1,2,3) + b(4,5,6) = (a,2a,3a) + (4b,5b,6b) = (a + 4b, 2a+5b, 3a+6b)$$

es decir :

$$\begin{cases} 7 = a + 4b \\ 8 = 2a + 5b \\ 9 = 3a + 6b \end{cases} \quad \text{y resolviendo el sistema} \quad (a,b) = (-1,2)$$

Por tanto, (7,8,9) = -(1,2,3) + 2(4,5,6)

1.48. Se consideran los siguientes vectores de $\mathbf{R}^3$:

(1,1,0) , (1,0,1) , (0,1,1)

i) Demostrar que forman una base de $\mathbf{R}^3$

ii) Hallar las coordenadas de los vectores de la base canónica respecto de esta base.

SOLUCION:

i) $\mathbf{R}^3$ es un espacio vectorial de dimensión 3, luego el problema se reduce a demostrar que los vectores dados son linealmente independientes.

$$\lambda(1,1,0) + \mu(1,0,1) + \nu(0,1,1) = (0,0,0) \Rightarrow (\lambda+\mu, \lambda+\nu, \mu+\nu) = (0,0,0)$$

de donde resulta el sistema $\begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ \lambda + \nu = 0 \\ \mu + \nu = 0 \end{cases}$

del que se obtiene : $\lambda = \mu = \nu = 0$.

Luego los vectores son linealmente independientes, y forman una base de $\mathbf{R}^3$.

ii) Como todo vector de $\mathbf{R}^3$ se puede expresar como combinación lineal de los vectores de la base, para un vector cualquiera (a,b,c) se tiene:

$$\lambda(1,1,0) + \mu(1,0,1) + \nu(0,1,1) = (a,b,c) \quad \text{de donde se obtiene el sistema:}$$

$$\begin{cases} \lambda + \mu = a \\ \lambda + \nu = b \\ \mu + \nu = c \end{cases} \Rightarrow \lambda = \frac{a+b-c}{2} \ , \ \mu = \frac{a+c-b}{2} \ , \ \nu = \frac{b+c-a}{2}$$

Entonces, si

$(a,b,c) = (1,0,0) \Rightarrow (\lambda,\mu,\nu) = (1/2,1/2,-1/2)$

$(a,b,c) = (0,1,0) \Rightarrow (\lambda,\mu,\nu) = (1/2,-1/2,1/2)$

$(a,b,c) = (0,0,1) \Rightarrow (\lambda,\mu,\nu) = (-1/2,1/2,1/2)$

que son las coordenadas de los vectores de la base canónica respecto de la base anterior.

1.49. Sea **V** un espacio vectorial sobre un cuerpo **K**, y sea $\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$ un conjunto de vectores linealmente independientes. Demostrar que el conjunto $\{a_1x_1,a_2x_2,\ldots,a_nx_n\}$, donde los escalares $a_1,a_2,\ldots,a_n$ son todos distintos de cero, es un conjunto linealmente independiente.

SOLUCION:

Los vectores $\{a_1x_1,a_2x_2,\ldots,a_nx_n\}$ son linealmente independientes si la relación,

$$c_1(a_1x_1) + c_2(a_2x_2) + \ldots + c_n(a_nx_n) = 0 \qquad (1)$$

implica $c_1 = c_2 = \ldots = c_n = 0.$

La relación (1) es equivalente a,

$$(c_1a_1)x_1 + (c_2a_2)x_2 + \ldots + (c_na_n)x_n = 0 \qquad (2)$$

Siendo los vectores $x_1,x_2,\ldots,x_n$ un conjunto linealmente independiente, de la relación (2) se tiene,

$$c_1a_1 = c_2a_2 = \ldots = c_na_n = 0 \qquad (3)$$

Finalmente, como los escalares $a_1,a_2,\ldots,a_n$ son todos distintos de cero se deduce,

$$c_1 = c_2 = \ldots = c_n = 0$$

1.50. Sea **V** un espacio vectorial sobre un cuerpo **K**, y sea $\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$ un conjunto de vectores linealmente independientes. Demostrar que el conjunto $\{u_1,u_2,\ldots,u_n\}$, donde $u_1 = x_1$, $u_2 = x_1+x_2$, $u_3 = x_1+x_2+x_3$, ..., $u_n = x_1+x_2+x_3+\ldots+x_n$, es un conjunto de vectores linealmente independientes.

SOLUCION:

Los vectores $u_1,u_2,\ldots,u_n$ son linealmente independientes si la relación

$$c_1u_1 + c_2u_2 + \ldots + c_nu_n = 0 \qquad (1)$$

implica $c_1 = c_2 = \ldots = c_n = 0$.

La relación (1) es equivalente a,

$$0 = c_1x_1 + c_2(x_1+x_2) + c_3(x_1+x_2+x_3) + \ldots + c_n(x_1+x_2+x_3+\ldots+x_n)$$
$$= (c_1+c_2+c_3+\ldots+c_n)x_1 + (c_2+c_3+\ldots+c_n)x_2 + (c_3+\ldots+c_n)x_3 + \ldots + c_nx_n$$

Siendo los vectores $x_1,x_2,\ldots,x_n$ linealmente independientes se tiene:

$$c_1+c_2+c_3+\ldots+c_n = c_2+c_3+\ldots+c_n = c_3+\ldots+c_n = \ldots = c_{n-1}+c_n = c_n = 0,$$

de donde, $c_1 = c_2 = c_3 = \ldots = c_n = 0$

1.51. Se consideran en $\mathbf{R}^5$ los vectores siguientes:

$x_1 = (1,-1,0,2,0)$, $x_2 = (0,0,-1,0,1)$, $x_3 = (1,-1,1,1,0)$ y $x_4 = (0,0,1,1,1)$.

Extraer un conjunto de vectores linealmente independientes utilizando el método de reducción en "cascada".

SOLUCION:

$$\begin{cases} x_1 = (1,-1,0,2,0) \\ x_2 = (0,0,-1,0,1) \\ x_3 = (1,-1,1,1,0) \\ x_4 = (0,0,1,1,1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = (1,-1,0,2,0) \\ y_2 = (0,0,-1,0,1) \\ y_3 = (0,0,1,-1,0) \\ y_4 = (0,0,1,1,1) \end{cases} \text{con} \begin{cases} y_1 = x_1 \\ y_2 = x_2 - 0.x_1 \\ y_3 = x_3 - 1.x_1 \\ y_4 = x_4 - 0.x_1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} z_1 = (1,-1,0,2,0) \\ z_2 = (0,0,-1,0,1) \\ z_3 = (0,0,0,-1,1) \\ z_4 = (0,0,0,1,2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} w_1 = (1,-1,0,2,0) \\ w_2 = (0,0,-1,0,1) \\ w_3 = (0,0,0,-1,1) \\ w_4 = (0,0,0,0,3) \end{cases}$$

Los vectores $w_1,w_2.w_3,w_4$ son linealmente independientes, y por lo tanto así lo son los vectores x_1,x_2,x_3,x_4.

1.52. Se considera en $\mathbf{R}^4$ el conjunto de los vectores siguientes, $x_1 = (1,0,0,-1)$, $x_2 = (2,1,1,0)$, $x_3 = (1,1,1,1)$, $x_4 = (1,2,3,4)$ y $x_5 = (0,1,2,3)$.

Extraer por el método de reducción en cascada un sistema de vectores linealmente independientes.

SOLUCION:

Aplicando el método de reducción en "cascada" se obtienen los siguientes conjuntos:

$$\begin{vmatrix} x_1 = (1,0,0,-1) \\ x_2 = (2,1,1,0) \\ x_3 = (1,1,1,1) \\ x_4 = (1,2,3,4) \\ x_5 = (0,1.2.3) \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} y_1 = (1,0,0,-1) \\ y_2 = (0,1,1,2) \\ y_3 = (0,1,1,2) \\ y_4 = (0,2,3,5) \\ y_5 = (0,1,2,3) \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} z_1 = (1,0,0,-1) \\ z_2 = (0,1,1,2) \\ z_3 = (0,0,0,0) \\ z_4 = (0,0,1,1) \\ z_5 = (0,0,1,1) \end{vmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{vmatrix} w_1 = (1,0,0,-1) \\ w_2 = (0,1,1,2) \\ w_3 = (0,0,0,0) \\ w_4 = (0,0,1,1) \\ w_5 = (0,0,0,0) \end{vmatrix}$$

Los vectores w_1,w_2,w_4 son linealmente independientes, y lo mismo sucede con los vectores z_1,z_2,z_4 por tanto con los y_1,y_2,y_4 y finalmente con los x_1,x_2,x_4.

1.53. En el espacio vectorial K^4 , donde $K = Z/7Z$ se consideran los vectores

$$u = (\bar{5},\bar{3},\bar{3},\bar{0}) \quad y \quad v = (\bar{3},\bar{1},\bar{2},\bar{2})$$

i) Hallar una base del subespacio engendrado por u y v.

ii) Hallar el número de vectores que tiene este subespacio.

iii) Hallar las coordenadas del vector $w = (\bar{5},\bar{1},\bar{0},\bar{5})$ respecto de la base dada en i).

S O L U C I O N :

i) Los vectores u y v son linealmente independientes puesto que no son proporcionales. Forman, por tanto, una base del subespacio vectorial que engendran.

ii) Todo vector del subespacio engendrado por u y v se escribe de la forma

$$w = au + bv \quad , \quad a,b \in K$$

Como a y b pueden tomar cualquier valor de K resulta que el número de vectores posibles es $7.7 = 49$

iii) Si a y b son las coordenadas de $(\bar{5},\bar{1},\bar{0},\bar{5})$ en la base $B = (u,v)$ se tiene :

$$\begin{aligned}(\bar{5},\bar{1},\bar{0},\bar{5}) &= a(\bar{5},\bar{3},\bar{3},\bar{0}) + b(\bar{3},\bar{1},\bar{2},\bar{2}) \\ &= (\bar{5}a,\bar{3}a,\bar{3}a,\bar{0}) + (\bar{3}b,b,\bar{2}b,\bar{2}b) \\ &= (\bar{5}a + \bar{3}b,\bar{3}a + b, \bar{3}a + \bar{2}b,\bar{2}b)\end{aligned}$$

de donde resulta el siguiente sistema de ecuaciones en el cuerpo K :

$$\left\{\begin{aligned}\bar{5} &= \bar{5}a + \bar{3}b \\ \bar{1} &= \bar{3}a + b \\ \bar{0} &= \bar{3}a + \bar{2}b \\ \bar{5} &= \bar{2}b\end{aligned}\right. \Rightarrow \left\{\begin{aligned}\bar{0} &= \bar{3}a + \bar{5} \\ b &= \bar{6}\end{aligned}\right. \Rightarrow \left\{\begin{aligned}\bar{3}a &= \bar{2} \\ b &= \bar{6}\end{aligned}\right. \Rightarrow \left\{\begin{aligned}a &= \bar{3} \\ b &= \bar{6}\end{aligned}\right.$$

1.54. Determinar los parámetros m y n para que el vector $u = (1,m,4,n)$ del espacio vectorial numérico R^4 pertenezca al subespacio vectorial engendrado por los vectores

$$v = (2,-1,2,3) \quad y \quad w = (1,3,2,1)$$

S O L U C I O N :

Si u pertenece al subespacio engendrado por v y w entonces $u = av + bw$ de donde se obtiene el sistema :

$$\left.\begin{aligned}1 &= 2a + b \\ m &= -a + 3b \\ 4 &= 2a + 2b \\ n &= 3a + b\end{aligned}\right\} \text{ y resolviendo el sistema } \left\{\begin{aligned}a &= -1 \\ b &= 3 \\ m &= 10 \\ n &= 0\end{aligned}\right.$$

1.55. Se considera el espacio vectorial R^4 y se pide hallar

a) una base que contenga al vector (1,2,1,1)

b) una base que contenga los vectores (1,1,0,2) y (1,-1,2,0)

c) una base que contenga los vectores (1,1,0,0) , (0,0,2,2), (0,3,3,0)

S O L U C I O N :

a) Como la dimensión de R^4 es 4 , se pueden elegir tres vectores de la base canónica que con el vector (1,2,1,1) formen una base.

$$B = ((1,2,1,1),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1))$$

es una base ya que colocados en filas forman una "cascada" como se en :

(1,2,1,1)
(0,1,0,0)
(0,0,1,0)
(0,0,0,1)

b) Una base que contenga a los vectores (1,1,0,2) , (1,-1,2,0) es

$$B = ((1,1,0,2),(1,-1,2,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1))$$

Comprobemos que son linealmente independientes por el método de "cascada" :

$$\left\{\begin{aligned}&(1,1,0,2)\\&(1,-1,-2,0)\\&(0,0,1,0)\\&(0,0,0,1)\end{aligned}\right. \Rightarrow \left\{\begin{aligned}&(1,1,0,2)\\&(0,-2,-2,-2) = (1,-1,-2,0) - (1,1,0,2)\\&(0,0,1,0)\\&(0,0,0,1)\end{aligned}\right.$$

Estos últimos son evidentemente independientes , y por tanto, lo son los anteriores.

c) Los vectores (1,1,0,0) , (0,0,2,2) y (0,3,3,0) son linealmente independientes puesto que forman una "cascada" de vectores según se ve a continuación:

(1,1,0,0)
(0,3,3,0)
(0,0,2,2)

Si añadimos el vector (0,0,0,1) de la base canónica el conjunto de vectores

(1,1,0,0)
(0,3,3,0)
(0,0,2,2)
(0,0,0,1)

forman también "cascada", luego son linealmente independientes y ,por tanto, una base del espacio vectorial R^4.

1.56. Sea **V** un espacio vectorial sobre un cuerpo K, y sea $L = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ un conjunto de vectores de **V**. Se define :

$y_1 = x_1$, $y_2 = x_2 - a_1 x_1$, ... , $y_n = x_n - a_{n-1} x_1$

donde $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ pertenecen a **K**. Sea $L' = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$. Demostrar que si L' contiene r vectores linealmente independientes, entonces L contiene r vectores linealmente independientes.

S O L U C I O N :

1 Supongamos que $y_1, y_2, \ldots, y_r$ son vectores linealmente independientes, y sea

$$b_1 x_1 + b_2 x_2 + \ldots + b_r x_r = 0$$

entonces se verifica :

$$b_1 y_1 + b_2(y_2 + a_1 x_1) + \ldots + b_r(y_r + a_{r-1} x_1) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$(b_1 y_1 + b_2 y_2 + \ldots + b_r y_r) + (b_2 a_1 + \ldots + b_r a_{r-1})\, x_1 = 0 \quad \Rightarrow$$

$$(b_1 + b_2 a_1 + \ldots + b_r a_{r-1}) y_1 + b_2 y_2 + \ldots + b_r y_r = 0$$

y siendo los vectores $y_1, y_2, \ldots, y_n$ linealmente independientes ,

$$\left.\begin{array}{r} b_1 + b_2 a_1 + \ldots + b_r a_{r-1} = 0 \\ b_2 = 0 \\ \ldots \quad \ldots \\ b_r = 0 \end{array}\right\}$$

de donde resolviendo el sistema , $b_1 = b_2 = \ldots = b_r = 0$

Por tanto los vectores $x_1, x_2, \ldots, x_r$ son linealmente independientes.

2 Sea ahora x_s un vector de L , con $s \geq r+1$, entonces

$x_s = y_s + a_{s-1} x_1$ de donde, como $y_s = \sum_{j=1}^{r} c_{sj} y_j$ se obtiene :

$$x_s = \sum_{j=1}^{r} c_{sj} y_j + a_{s-1} x_1 = \sum_{j=2}^{r} c_{sj}(x_j - a_{j-1} x_1) + a_{s-1} x_1 + c_{s1} y_1$$

Por tanto , $x_s = \sum_{j=1}^{r} d_j x_j$ con $\left\{\begin{array}{l} d_1 = \sum_{j=2}^{r} (-c_{sj}) a_{j-1} + a_{s-1} + c_{s1} \text{ , y} \\ d_j = c_{sj} \quad \text{para } j \neq 1 \text{ ,} \end{array}\right.$

luego los vectores x_s para $s \geq r+1$ dependen linealmente de los vectores x_i $(1 \leq i \leq r)$

1.57. Se considera el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual que tres y el polinomio cero, que designaremos por $\mathbf{P}_3(X)$; se considera también el polinomio

$$f(X) = aX^3 + bX^2 + cX + d \quad , \text{ con } a \neq 0.$$

Demostrar que los polinomios

$$f(X) \ , \ f'(X) \ , \ f''(X) \ , \ f'''(X)$$

forman una base de $\mathbf{P}_3(X)$.

S O L U C I O N :

Hallando las derivadas de f(X) se tiene :

$$f'(X) = 3aX^2 + 2bX + c \ ; \ f''(X) = 6aX + 2b \ ; \ f'''(X) = 6a$$

Cada polinomio de la sucesión

$$6a \ , \ 6aX + 2b \ , \ 3aX^2 + 2bX + c \ , \ aX^3 + bX^2 + cX + d$$

es de mayor grado que cualquiera de los anteriores, y por tanto no puede ser una combinación lineal de los que le preceden, luego los 4 polinomios son linealmente independientes y como la dimensión de $\mathbf{P}_3(X)$ es 4 forman una base.

1.58. Demostrar que el espacio vectorial de las funciones continuas de **R** en **R** es de dimensión infinita.

S O L U C I O N :

Sea $S = \{f_n : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R} \ / \ n \in \mathbf{N}\}$ donde $f_n(x) = \text{sen}^n x$.

1 Las funciones f_n son evidentemente contínuas en todo **R**.

2 Veamos que forman un sistema linealmente independiente.

Sea $\sum a_n f_n = 0$, donde $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ es una familia de números reales de soporte finito, es decir, son nulos todos salvo un número finito, y donde 0 es la función definida por $0(x) = 0$,para todo $x \in \mathbf{R}$.

Consideremos el polinomio $\sum a_n u^n$, entonces si $\alpha \in [-1,1]$ existe un $x_o \in \mathbf{R}$ tal que sen $x_o = \alpha$, por tanto ,

$$\sum a_n \alpha^n = \sum a_n \text{ sen}^n x_o = \sum a_n f_n(x_o) = (\sum a_n f_n)(x_o) = 0(x) = 0,$$

es decir,que el polinomio $\sum a_n u^n$ tiene infinitas raices pues todo $\alpha \in [-1,1]$ es una raíz, luego debe ser el polinomio nulo.

Consecuencia : $a_n = 0$, para todo n

Por tanto, dado un número cualquiera n,existen n funciones linealmente independientes, luego la dimensión de este espacio es infinita.

1.59. Sea $\mathbf{V}$ el espacio vectorial de las funciones de $\mathbf{R}$ en $\mathbf{R}$; para cada $n \in \mathbf{N}$ sea $t_n \in \mathbf{R}$ y $f_n : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ la aplicación definida por $f_n(x) = e^{t_n x}$. Demostrar que la familia $\{f_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ es linealmente independiente si, y solo si, las t_n son todas distintas.

SOLUCION:

a) Supongamos que la familia $\{f_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ es linealmente independiente.
Si los t_n no son todos distintos, existen dos $i,j \in \mathbf{N}$ tales que $t_i = t_j$ con $i \neq j$, de aquí que la familia $\{f_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ tiene dos vectores iguales y, por tanto, no puede ser libre, contradicción.

b) Supongamos que todos los t_n son distintos.
Si la familia $\{f_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ no es libre existen relaciones lineales nulas no triviales. Elijamos una relación de dependencia lineal que tenga un número mínimo de coeficientes no nulos; sea esta,

$$a_1 f_{i_1} + a_2 f_{i_2} + \dots + a_r f_{i_r} = 0 \quad , \; a_1, a_2, \dots, a_r \in \mathbf{R}^* \; , [1]$$

Derivando esta relación, y teniendo en cuenta que $f'_{i_j} = t_{i_j} f_{i_j}$, se tiene:

$$a_1 t_{i_1} f_{i_1} + a_2 t_{i_2} f_{i_2} + \dots + a_r t_{i_r} f_{i_r} = 0 \qquad , [2]$$

Multiplicando la relación [1] por t_{i_r} y restando [1] y [2] se tiene:

$$a_1(t_{i_1} - t_{i_r}) f_{i_1} + a_2(t_{i_2} - t_{i_r}) f_{i_2} + \dots + a_{r-1}(t_{i_{r-1}} - t_{i_r}) f_{i_{r-1}} = 0$$

pero debido a nuestra elección de r esta última relación lineal nula debe ser trivial, luego

$$a_1(t_{i_1} - t_{i_r}) = a_2(t_{i_2} - t_{i_r}) = \dots = a_{r-1}(t_{i_{r-1}} - t_{i_r}) = 0$$

y como los t_n son distintas,

$$a_1 = a_2 = \dots = a_{r-1} = 0$$

Por tant teniendo en cuenta esta relación y la [1], resulta que $a_r f_{i_r} = 0$ de donde $a_r = 0$ ya que $f_{i_r}(x) \neq 0$ para todo x.
En consecuencia, la relación [1] es trivial en contra de lo supuesto.

1.60. En el espacio vectorial $(F(\mathbf{R},\mathbf{R}),+,.\mathbf{R})$ se consideran las funciones:

$f_1(x) = \cos 2x \cos x$, $f_2(x) = \operatorname{sen} 2x \operatorname{sen} x$, $f_3(x) = \cos x$

Comprobar si son linealmente dependientes.

SOLUCION:

El conjunto $\{f_1, f_2, f_3\}$ no es libre ya que

$$\cos 2x \cos x + \operatorname{sen} 2x \cos x = \cos(2x - x) = \cos x$$

es decir, $f_1 + f_2 = f_3$.

1.61. Sea $\mathbf{V}$ el espacio vectorial de las funciones de $\mathbf{R}$ en $\mathbf{R}$. Demostrar que las funciones f,g,h son independientes cuando:

i) $f(x) = e^{2x}$, $g(x) = x^2$, $h(x) = x$

ii) $f(x) = \operatorname{sen} x$, $g(x) = \cos x$, $h(x) = x$

SOLUCION:

Las funciones f,g,h son linealmente independientes cuando

$$af + bg + ch = f_o \Rightarrow a = b = c = 0$$

siendo f_o la función cero.
La relación $af + bg + ch = f_o \Rightarrow af(x) + bg(x) + ch(x) = 0$, para todo x

i) En la ecuación

$$ae^{2x} + bx^2 + cx = 0$$

ponemos:
$$\begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ae^0 + b.0 + c.0 = 0 \\ ae^2 + b + c = 0 \\ ae^4 + 4b + 2c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ ae^2 + b + c = 0 \\ ae^4 + 4b + 2c = 0 \end{cases}$$

y resolviendo es sistema resulta: $(a,b,c) = (0,0,0)$
Luego, las funciones son linealmente independientes.

ii) En la ecuación $a \operatorname{sen} x + b \cos x + cx = 0$

ponemos:
$$\begin{cases} x = 0 \\ x = \pi/2 \\ x = \pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a.0 + b.1 + c.0 = 0 \\ a.1 + b.0 + c\pi/2 = 0 \\ a.0 + b.(-1) + c\pi = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 0 \\ a + c\pi/2 = 0 \\ -b + c\pi = 0 \end{cases}$$

y resolviendo el sistema resulta: $(a,b,c) = (0,0,0)$

1.62. i) Demostrar que los vectores $u = (1+i, 2i)$, $v = (1, 1+i)$ del espacio vectorial complejo $(\mathbf{C}^2,+,.\mathbf{C})$ son linealmente dependientes

ii) Demostrar que los mismos vectores u,v del espacio vectorial real $(\mathbf{C}^2,+,.\mathbf{R})$ son linealmente independientes.

SOLUCION:

i) Los vectores u y v son linealmente dependientes sii $u = \lambda v$, λ
Como

$$(1 + i \, , \, 2i) = (1 + i)(1, 1 + i) \quad , \lambda = 1 + i$$

se sigue que los vectores dados son linealmente dependientes.

ii) Si los vectores fueran dependientes existiría un número real λ, tal que
$u = \lambda v$; entonces $(1+i, 2i) = \lambda(1 , 1+i) = (\lambda, \lambda(1+i)) \Rightarrow \lambda = 1 + i$
lo cual no es válido pues λ debe pertenecer a $\mathbf{R}$.

1.63. Sea V un espacio vectorial sobre el cuerpo K, y $W_1, W_2, \ldots, W_n$ subespacios vectoriales de V. Se dice que el espacio vectorial V es suma directa de $W_1, W_2, \ldots, W_n$ si todo vector x de V se escribe de forma única como una suma de la forma ,

$$x = x_1 + x_2 + \ldots + x_n \quad , x_1 \in W_1, x_2 \in W_2, \ldots, x_n \in W_n$$

1) Demostrar que la condición "V es suma directa de $W_1, W_2, \ldots, W_n$" es equivalente a las dos condiciones siguientes,

a) Todo vector x puede escribirse en la forma ,

$$x = x_1 + x_2 + \ldots + x_n \quad , x_1 \in W_1, x_2 \in W_2, \ldots, x_n \in W_n$$

b) Para todo subespacio vectorial W_i se verifica ,

$$W_i \cap (W_1 + W_2 + \ldots + W_{i-1} + W_{i+1} + \ldots + W_n) = \{0\}$$

2) Dar un contraejemplo que demuestre que la condición de ser V suma directa de las W_i no es implicada por la 1) y la condición

c) $W_1 \cap W_2 \cap \ldots \cap W_n = \{0\}$, que parece la inmediata generalización del caso n = 2.

S O L U C I O N :

1) Supongamos que V es suma directa de los W_i, entonces evidentemente se verifica la condición a).

Sea $z \in W_i \cap (W_1 + \ldots + W_{i-1} + W_{i+1} + \ldots + W_n)$, entonces se tiene que

$$z = x_1 + x_2 + \ldots + x_{i-1} + x_{i+1} + \ldots + x_n \quad \text{de donde ,}$$

$$0 = x_1 + x_2 + \ldots + x_{i-1} + (-z) + x_{i+1} + \ldots + x_n$$ (cada sumando está en el subespacio de índice el correspondiente al lugar que ocupa) , como 0 tambien se puede escribir $0 = 0 + 0 + \ldots + 0 + 0 + 0 + \ldots + 0$, de la unicidad se sigue para todo i, $x_i = 0$, luego $z = 0$ y de aquí que se cumpla la condición b)

Recíprocamente, si se verifica a) y b) evidentemente todo $x \in V$ es de la forma ,

$$x = x_1 + x_2 + \ldots + x_n \quad , \text{con } x_1 \in W_1, x_2 \in W_2, \ldots , x_n \in W_n$$

Veamos ahora la unicidad.

Sea

$$x = x_1 + x_2 + \ldots + x_n \quad , \text{con } x_1 \in W_1, x_2 \in W_2, \ldots , x_n \in W_n$$
$$= y_1 + y_2 + \ldots + y_n \quad , \text{con } y_1 \in W_1, y_2 \in W_2, \ldots , y_n \in W_n$$

entonces , $(x_1 - y_1) + (x_2 - y_2) + \ldots + (x_n - y_n) = 0$, con $x_i - y_i \in W_i$.

de donde , $x_i - y_i = \sum_{i \neq j} (x_j - y_j) \in W_i \cap (W_1 + W_2 + \ldots + W_{i-1} + W_{i+1} + \ldots + W_n)$

y aplicando la condición b) se tiene que $x_i - y_i = 0$, es decir , $x_i = y_i$

2) Veamos ahora como las condiciones a) y c) no implican la condición de ser V suma directa.

Sea $V = \mathbf{R}^3$ .En este espacio vectorial consideramos los siguientes subespacios :

- $W_1 = \{(0,y,z) \ / \ y,z \in \mathbf{R}\}$
- $W_2 = \{(x,0,z) \ / \ x,z \in \mathbf{R}\}$
- $W_3 = \{(x,x,0) \ / \ x \in \mathbf{R}\}$

Entonces se verifica :

a) $W_1 \cap W_2 \cap W_3 = \{0\}$, como se puede comprobar fácilmente .

b) Todo vector (a,b,c) se puede escribir así :

$$(a,b,c) = (0,b-1,1) + (a-1,0,c-1) + (1,1,0) \ ,$$

es decir como suma de un vector de W_1, uno de W_2 y otro de W_3 .

c) No existe la unicidad de esta suma.En efecto :

$$(1,1,1) = (0,2,3) + (2,0,-2) + (-1,-1,0)$$
$$= (0,5,4) + (5,0,-3) + (-4,-4,0)$$

1.64. Se considera en $\mathbf{Z}^3_{(7)}$ (= espacio vectorial sobre el cuerpo de los enteros módulo 7) los vectores $x = (\bar{1},\bar{2},\bar{0})$, $y = (\bar{3},\bar{4},\bar{5})$ y $z = (\bar{4},\bar{1},\bar{6})$.Se pide :

1) ¿Forman una base de $\mathbf{Z}^3_{(7)}$?

2) En caso afirmativo encontrar las coordenadas del vector $(\bar{1},\bar{1},\bar{1})$ respecto de dicha base.

S O L U C I O N :

1) De $ax + by + cz = a(\bar{1},\bar{2},\bar{0}) + b(\bar{3},\bar{4},\bar{5}) + c(\bar{4},\bar{1},\bar{6}) = (\bar{0},\bar{0},\bar{0})$

se sigue que

$$\left.\begin{array}{r} a + \bar{3}b + \bar{4}c = \bar{0} \\ \bar{2}a + \bar{4}b + c = \bar{0} \\ \bar{5}b + \bar{6}c = \bar{0} \end{array}\right\} \Rightarrow a = b = c = \bar{0}$$

luego los vectores x,y,z son linealmente independientes y forman una base de $\mathbf{Z}^3_{(7)}$, ya que la dimensión de este espacio vectorial es 3.

2) La expresión del vector $(\bar{1},\bar{1},\bar{1})$ en la base $B = (x,y,z)$ es :

$$(\bar{1},\bar{1},\bar{1}) = a(\bar{1},\bar{2},\bar{0}) + b(\bar{3},\bar{4},\bar{5}) + c(\bar{4},\bar{1},\bar{6})$$

de donde

$$\left.\begin{array}{r} a + \bar{3}b + \bar{4}c = \bar{1} \\ \bar{2}a + \bar{4}b + c = \bar{1} \\ \bar{5}b + \bar{6}c = \bar{1} \end{array}\right\}$$

y de aquí : $(a,b,c) = (\bar{4},\bar{4},\bar{5})$ que son las coordenadas de $(\bar{1},\bar{1},\bar{1})$.

1.65. Demostrar que R^3 es la suma directa de los siguientes subespacios vectoriales :

$$W_1 = \{(x,x,0) \ / \ x \in R\}$$
$$W_2 = \{(0,y,y) \ / \ y \in R\}$$
$$W_3 = \{(z,z,z) \ / \ z \in R\}$$

S O L U C I O N :

1 Todo vector de R^3 se puede poner como suma de los W_1, W_2, W_3

Sea el vector $(a,b,c) \in R^3$, entonces se puede escribir como:

$$(a,b,c) = (b-c,b-c,0) + (0,b-a,b-a) + (a+c-b,a+c-b,a+c-b)$$

2 $W_1 \cap (W_2 + W_3) = W_2 \cap (W_1 + W_3) = W_3 \cap (W_1 + W_2) = \{0\}$

En efecto , si un vector $(a,b,c) \in W_1 \cap (W_2 + W_3)$ se tiene

a) $(a,b,c) \in W_1$, es decir , $(a,b,c) = (a,a,0)$

b) $(a,b,c) \in W_1 + W_2$, es decir , $(a,b,c) = (0,y,y) + (z,z,z) = (z,y+z,y+z)$

De a) y b) resulta que :

$(a,a,0) = (z,y+z,y+z)$

luego $\begin{cases} a = z \\ a = y + z \\ 0 = y + z \end{cases}$ de donde se obtienen $\begin{cases} a = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

Por tanto , $(a,b,c) = (0,0,0)$ y $W_1 \cap (W_2 + W_3) = \{0\}$

Análogamente se demuestra que $W_2 \cap (W_1 + W_3) = \{0\}$
$W_3 \cap (W_1 + W_2) = \{0\}$

1.66. Demostrar que en R^3 (= espacio vectorial numérico de tres dimensiones) los vectores $x = (1,-1,0)$, $y = (2,1,0)$ y $z = (0,1,1)$ son linealmente independientes.Encontrar las coordenadas respecto de dicha base del vector (1,1,1).

S O L U C I O N :

1) De $ax + by + cz = a(1,-1,0) + b(2,1,0) + c(0,1,1) = 0$ se sigue que ,

$$a = b = c = 0$$

Luego x,y,z son linealmente independientes y forman una base de R^3.

2) De $(1,1,1) = a(1,-1,0) + b(2,1,0) + c(0,1,1)$

se sigue que $(a,b,c) = (1/3,1/3,1)$,que son las coordenadas de (1,1,1). en la base $B = (x,y,z)$.

1.67. Sea $F(R,R)$ el espacio vectorial sobre R de las aplicaciones de R en R; sea W_1 el subespacio de las funciones pares,es decir, $f \in W_1$ sii para todo x , $f(x) = f(-x)$, y sea W_2 el subespacio de las funciones impares , es decir, $f \in W_2$ sii para todo $x \in R$ se tiene que $f(-x) = -f(x)$.

Demostrar que $F(R,R) = W_1 \oplus W_2$.

S O L U C I O N :

1) $W_1 \cap W_2 = \{0\}$

Sea $f \in W_1 \cap W_2$ entonces se verifica :

a) Para todo $x \in R$ se cumple $f(x) = f(-x)$ ya que $f \in W_1$

b) Para todo $x \in R$ se cumple $f(-x) = -f(x)$ ya que $f \in W_2$

luego de a) y b se tiene :

$$f(x) = f(-x) = -f(x) \quad , \text{ y de aquí } 2f(x) = 0$$

Por tanto $f(x) = 0$ para todo $x \in R$, es decir , $W_1 \cap W_2 = \{0\}$

2) $F(R,R) = W_1 + W_2$

Sea $f \in F(R,R)$,veamos si puede escribirse como suma de una función par g y una función impar h. Si esto es posible se tiene:

$$f(x) = g(x) + h(x)$$
$$f(-x) = g(-x) + h(-x) = g(x) - h(x) \quad , \text{ para todo } x \in R$$

Despejando las funciones g y h resulta :

- $g(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x))$, para todo $x \in R$
- $h(x) = \frac{1}{2}(f(x) - f(-x))$, para todo $x \in R$

Evidentemente : $f = g + h$, con $g \in W_1$ y $h \in W_2$, luego $F(R,R) = W_1 + W_2$

De 1) y 2) se deduce que $F(R,R) = W_1 \oplus W_2$

1.68. Sean U y W dos subespacios de R^3 definidos por

$$U = \{(a,b,c)/a = b = c\} \quad ; \quad W = \{(0,b,c)/b,c \in R\}$$

Demostrar que $R^3 = U \oplus W$

S O L U C I O N :

i) $(a,b,c) \in U \cap W \Rightarrow a = b = c$ y $a = 0 \Rightarrow a = b = c = 0$
$\Rightarrow (a,b,c) = (0,0,0)$

ii) $(a,b,c) \in R^3$, entonces $(a,b,c) = (a,a,a) + (0,b-a,c-a)$

donde $(a,a,a) \in U$ y $(0,b-a,c-a) \in W$

De i) y ii) se sigue que $R^3 = U \oplus W$

1.69. En el espacio vectorial $(\mathbb{R}^3,+,.\mathbb{R})$ se consideran los subespacios vectoriales ,

$$W_1 = \{(x,y,z)/x + y + z = 0\}$$

$$W_2 = \{(t,2t,3t)/t \in \mathbb{R}\}$$

Demostrar que $\mathbb{R}^3$ es suma directa de W_1 y W_2, es decir, $\mathbb{R}^3 = W_1 \oplus W_2$.

S O L U C I O N :

1) $W_1 \cap W_2 = \{(0,0,0)\}$

Sea $u = (x,y,z) \in W_1 \cap W_2$, entonces se verifica que $x + y + z = 0$ ya que $u \in W_1$, y también que $y = 2x$, $z = 3x$ ya que $u \in W_2$.

Por tanto :

$x + 2x + 3x = 0 \Rightarrow 6x = 0 \Rightarrow x = 0$ de donde $u = (0,0,0)$, es decir , $W_1 \cap W_2 = \{(0,0,0)\}$

2) $W_1 + W_2 = \mathbb{R}^3$

Sea $u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, entonces si $\mathbb{R}^3 = W_1 + W_2$ debemos poder encontrar dos vectores $v \in W_1$ y $w \in W_2$ tales que $u = v + w$.

Sea $v = (a,b,c) \in W_1$ con $a + b + c = 0$,
$w = (t,2t,3t) \in W_2$ con $t \in \mathbb{R}$.

Si $\mathbb{R}^3 = W_1 + W_2$, entonces la ecuación $u = v + w$ debe poseer solución.

De $(x,y,z) = (a,b,c) + (t,2t,3t)$ se obtiene el siguiente sistema:

$$\left.\begin{aligned} x &= a + t \\ y &= b + 2t \\ z &= c + 3t \\ 0 &= a + b + c \end{aligned}\right\} \Rightarrow x + y + z = 6t \Rightarrow t = \frac{1}{6}(x + y + z)$$

$$\text{luego} \quad \left\{\begin{aligned} a &= \frac{1}{6}(5x - y - z) \\ b &= \frac{1}{6}(-2x + 4y - 2z) \\ c &= \frac{1}{2}(-3x - 3y + 3z) \end{aligned}\right.$$

Conocidos a,b,c y t en función de x,y,z se obtiene la descomposición de todo vector de $\mathbb{R}^3$ como suma de uno de W_1 y de otro de W_2 , de donde

$$\mathbb{R}^3 = W_1 + W_2$$

De 1) y 2) se obtiene finalmente que

$$\mathbb{R}^3 = W_1 \oplus W_2$$

1.70. En $\mathbb{R}^2$ se consideran los subespacios siguientes :
$W_1 = \{(x,y) / ax + by = 0\}$, y $W_2 = \{(x,y) / cx + dy = 0\}$
donde a,b,c,d son números reales no todos nulos. Demostrar que :

"$\mathbb{R}^2 = W_1 \oplus W_2$ si, y solo si , $ad - bc \neq 0$"

S O L U C I O N :

1 $ad - bc \neq 0$

a) Sea $v = (x_1,y_1)$ un vector de $W_1 \cap W_2$, entonces se verifica que :

$$\left\{\begin{aligned} ax_1 + by_1 &= 0 \\ cx_1 + dy_1 &= 0 \end{aligned}\right. \Rightarrow \left\{\begin{aligned} acx_1 + bcy_1 &= 0 \\ acx_1 + ady_1 &= 0 \end{aligned}\right. \Rightarrow (ad - bc)y_1 = 0$$

de donde $y_1 = 0$, y por tanto $ax_1 = cx_1 = 0$ (1) .

Como a y c no pueden ser simultáneamente nulos ,ya que en caso contrario $ad - bc = 0$, se tiene de (1) que $x_1 = 0$

Consecuencia : $v = (x_1,y_1) = (0,0)$ y $W_1 \cap W_2 = \{0\}$

b) Por otra parte se tiene :

a) $\dim W_1 = \dim W_2 = 1$

b) $\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2)$
$= 1 + 1 - 0 = 2$

Luego $\mathbb{R}^2 = W_1 + W_2$

De a) y b) se deduce que $\mathbb{R}^2 = W_1 \oplus W_2$

2 $\mathbb{R}^2 = W_1 \oplus W_2$

a) Supongamos que $ad - bc = 0$, es decir que , $ad = bc$, entonces si $b \neq 0$ $W_1 \subset W_2$. En efecto , si $v = (x_1,y_1) \in W_1$ se verifica ,

$ax_1 + by_1 = 0 \Rightarrow adx_1 + bdy_1 = 0 \Rightarrow bcx_1 + bdy_1 = 0$, siendo $b \neq 0$, se tiene que $cx_1 + dy_1 = 0$, es decir , $v = (x_1,y_1) \in W_2$.

En este caso $W_1 + W_2 = W_2 \neq \mathbb{R}^2$, contradicción.

b) Supongamos que $ad - bc = 0$, es decir que , $ad = bc$ y además $b = 0$.

Entonces $W_1 = \{(0,y) / y \in \mathbb{R}\}$ y

$W_2 = \{(0,y) / y \in \mathbb{R}\}$ ya que en esta suposición $d = 0$ ya que $ad = bc$. Luego $W_1 = W_2$ y por tanto $W_1 + W_2 = W_1 = W_2 \neq \mathbb{R}^2$.

Contradicción

De a) y b) se deduce que $ad - bc \neq 0$.

1.71. Sean a y b dos números reales no nulos. Sea T el conjunto de las sucesiones de números reales $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tales que ,

"para todo $n \geq 1$, $u_{n+1} = au_n + bu_{n-1}$"

Demostrar que :

1) T es un subespacio vectorial de dimensión dos del espacio vectorial de las sucesiones de números reales.
2) Hallar la solución general de la relación.

S O L U C I O N :

1) a) La sucesión nula es un elemento de T

b) Sean $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ y $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ dos sucesiones de T , entonces si $n \geq 1$

$$u_{n+1} + v_{n+1} = au_n + bu_{n-1} + av_n + bv_{n-1}$$

$$= a(u_n + v_n) + b(u_{n-1} + v_{n-1}) \quad , \text{ luego } (u_n)_{n\in\mathbf{N}} + (v_n)_{n\in\mathbf{N}} \in T.$$

c) De $cu_{n+1} = c(au_n + bu_{n-1})$

$= a(cu_n) + b(cu_{n-1})$, se sigue que $c(u_n)_{n\in\mathbf{N}} = (cu_n)_{n\in\mathbf{N}} \in T$.

De a),b) y c) se deduce que T es un subespacio vectorial del espacio de las sucesiones reales.

Veamos ahora que $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ y $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ son linealmente independientes sii

$$\begin{vmatrix} u_o & v_o \\ u_1 & v_1 \end{vmatrix} \neq 0$$

Si $\begin{cases} \lambda u_o + \mu v_o = 0 \\ \lambda u_1 + \mu v_1 = 0 \end{cases}$, por la relación de recurrencia $\lambda u_n + \mu v_n = 0$ para todo n , luego como $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ y $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ son linealmente independientes, $\lambda = \mu = 0$, y el sistema debe tener solución única, es decir,

$\begin{vmatrix} u_o & v_o \\ u_1 & v_1 \end{vmatrix} \neq 0$. El recíproco es inmediato.

Por otra parte es evidente que conocidas u_o y u_1 está determinada por recurrencia la sucesión; entonces si $(w_n)_{n\in\mathbf{N}} \in T$ y $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ y $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ son linealmente independientes , entonces el sistema ,

$$\begin{cases} w_o = \lambda u_o + \mu v_o \\ w_1 = \lambda u_1 + \mu v_1 \end{cases}$$

tiene solución, luego $(w_n)_{n\in\mathbf{N}} = \lambda(u_n)_{n\in\mathbf{N}} + \mu(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ y , por tanto, $\{(u_n)_{n\in\mathbf{N}} , (v_n)_{n\in\mathbf{N}}\}$ es una base de T, y en consecuencia $\dim_{\mathbf{R}} T = 2$

2) Supongamos que $u_n = x^n$, entonces si $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ es solución se debe tener , $x^{n+1} = ax^n + bx^{n-1}$, y dividiendo por x^{n-1} se tiene:

$$x^2 - ax - b = 0.$$

a) La ecuación tiene dos soluciones reales distintas x_1 y x_2.

Entonces las sucesiones $(x_1^n)_{n\in\mathbf{N}}$ y $(x_2^n)_{n\in\mathbf{N}}$ son independientes y toda solución es de la forma :

$$(u_n)_{n\in\mathbf{N}} = c_1(x_1^n)_{n\in\mathbf{N}} + c_2(x_2^n)_{n\in\mathbf{N}}$$

Si n = 0 entonces $u_o = c_1 + c_2$,
si n = 1 entonces $u_1 = c_1x_1 + c_2x_2$ } y resolviendo el sistema:

$c_1 = \dfrac{u_ox_2 - u_1}{x_2 - x_1}$, y $c_2 = \dfrac{u_ox_1 - u_1}{x_1 - x_2}$, de donde la solución general es : $u_n = \dfrac{u_1 - u_ox_2}{x_1 - x_2} x_1^n + \dfrac{u_ox_1 - u_1}{x_1 - x_2} x_2^n$

b) La ecuación tiene dos raices iguales , $x_1 = x_2 = x$.

Entonces las sucesiones $(x^n)_{n\in\mathbf{N}}$ y $(nx^n)_{n\in\mathbf{N}}$ son independientes y toda solución es de la forma :

$$(u_n)_{n\in\mathbf{N}} = c_1(x^n)_{n\in\mathbf{N}} + c_2(nx^n)_{n\in\mathbf{N}}$$

Si n = 0 entonces $u_o = c_1$
si n = 1 entonces $u_1 = c_1x + c_2x$ } y resolviendo el sistema ,

$c_1 = u_o$ y $c_2 = \dfrac{u_1 - u_ox}{x}$ de donde la solución general es :

$$u_n = \left(u_o + \frac{u_1 - u_ox}{x}\, n\right) x^n$$

c) La ecuación tiene dos raices complejas x_1 y x_2 .

Sean : $x_1 = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$, $x_2 = r(\cos\theta - i \operatorname{sen}\theta)$

Entonces las sucesiones $\begin{cases} (r^n(\cos n\theta + i\operatorname{sen} n\theta))_{n\in\mathbf{N}} \\ (r^n(\cos n\theta - i\operatorname{sen} n\theta))_{n\in\mathbf{N}} \end{cases}$

son independientes, y las partes reales e imaginarias constituyen las soluciones independientes. Toda solución es de la forma :

$$(u_n)_{n\in\mathbf{N}} = c_1(r^n \cos n\theta)_{n\in\mathbf{N}} + c_2(r^n \operatorname{sen} n\theta)_{n\in\mathbf{N}}$$

Si n = 0 entonces $u_o = c_1$
si n = 1 entonces $u_1 = c_1r\cos\theta + c_2r\operatorname{sen}\theta$ } $c_1 = u_o$, $c_2 = \dfrac{u_1 - u_or\cos\theta}{r\operatorname{sen}\theta}$

1.72. Sea V un espacio vectorial real finito y $V^2 = V \times V$. En V^2 se definen la operación interna

$$(x,y) + (x',y') = (x + x', y + y')$$

y la operación externa con escalares complejos ,

$$(a + bi)(y,x) = (ax - by \ , \ bx + ay)$$

a) Demostrar que $(V^2,+,.C)$ es un espacio vectorial.

b) Estudiar la dependencia lineal de los vectores $(x,0),(0,x)$

c) Si $x_1,x_2,\ldots,x_m$ son vectores linealmente independientes de V, estudiar en V^2 la dependencia lineal de los vectores $(x_1,0),(x_2,0),\ldots,(x_m,0)$.

d) Construir un sistema generador de V^2 a partir del sistema generador $u_1,u_2,\ldots,u_p$ de **V**.

e) Construir a partir de la base $(e_1,e_2,\ldots,e_n)$ de **V** una base de V . ¿Cuál es la dimensión de V^2?.

S O L U C I O N :

a) La demostración es similar a la hecha en el ejercicio 1.12.

b) De la combinación nula

$$(a + bi)(x,0) + (a' + b'i)(0,x) = (0,0)$$

equivalente a ,

$$(ax,bx) + (-b'x,a'x) = (0,0)$$

se sigue que $ax - b'x = 0$ y $bx + a'x = 0$

es decir, $(a - b')x = 0$ y $(b + a')x = 0$

Estas relaciones se verifican para infinitas cuaternas de números reales, en particular, para $a = b' = b = 1$ y $a' = -1$. Entonces

$$(1 + i)(x,0) + (1 - i)(0,x) = (0,0)$$

y, por tanto, los vectores son linealmente dependientes.

c) Para estudiar la dependencia lineal de los vectores $(x_1,0),(x_2,0),\ldots,(x_m,0)$ consideremos la siguiente combinación lineal nula :

$$(a_1+b_1i)(x_1,0) + (a_2+b_2i)(x_2,0) + \ldots + (a_m+b_mi)(x_m,0) = 0$$

de donde ,

$$(a_1x_1,b_1x_1) + (a_ax_2,b_2x_2) + \ldots + (a_mx_m,b_mx_m) = 0$$

y de aquí :

$$\begin{cases} a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = 0 \\ b_1x_1 + b_2x_2 + \ldots + b_nx_n = 0 \end{cases}$$

Por ser los vectores $x_1,x_2,\ldots,x_n$ linealmente independientes resulta que

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_n = b_1 = b_2 = \ldots = b_n = 0$$

y por tanto, $a_1 + b_1i = a_2 + b_2i = \ldots = a_n + b_ni = 0$

es decir, los vectores $(x_1,0),(x_2,0),\ldots,(x_m,0)$ son linealmente independientes.

d) Veamos que los vectores $(u_1,0),(u_2,0),\ldots,(u_p,0)$ es un sistema generador de V^2. Sea (x,y) un vector de V^2; se tiene, por ser $u_1,u_2,\ldots,u_p$ un sistema generador de **V**, que :

$$\begin{cases} x = a_1u_1 + a_2u_2 + \ldots + a_pu_p \\ y = b_1u_1 + b_2u_2 + \ldots + b_pu_p \end{cases}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}(x,y) &= (a_1u_1 + a_2u_2 + \ldots + a_pu_p, b_1u_1 + b_2u_2 + \ldots + b_pu_p) \\ &= (a_1u_1,b_1u_1) + (a_2u_2,b_2u_2) + \ldots + (a_pu_p,b_pu_p) \\ &= (a_1 + b_1i)(u_1,0) + (a_2 + b_2i)(u_2,0) + \ldots + (a_p + b_pi)(u_p,0)\end{aligned}$$

luego , $(u_1,0),(u_2,0),\ldots,(u_p,0)$ es un sistema generador de V^2.

e) Una base de V^2 es $((e_1,0),(e_2,0),\ldots,(e_n,0))$.

En efecto :

- Por c) los vectores $(e_1,0),(e_2,0),\ldots,(e_n,0)$ son linealmente independientes ya que lo son $e_1, e_2,\ldots,e_n$ en **V**.
- Por d) los vectores $(e_1,0),(e_2,0),\ldots,(e_n,0)$ forman un sistema generador de V^2 por serlo $e_1, e_2,\ldots,e_n$ de V

Los espacios vectoriales V y V^2 tienen la misma dimención. En este caso, n.

1.73. Demostrar que el espacio vectorial $(C^2,+,.R)$ es de dimensión 4.

S O L U C I O N :

Vamos a ver que los vectores $B = \{(1,0),(i,0),(0,1),(0,i)\}$ forman una base de dicho espacio vectorial.

a) Los vectores de B forman un conjunto linealmente independiente.

$$\begin{aligned}a(1,0) + b(i,0) + c(0,1) + d(0,i) = (0,0) &\Rightarrow (a + bi, c + di) = (0,0) \\ &\Rightarrow a + bi = 0 \\ &\Rightarrow c + di = 0 \\ &\Rightarrow a = b = c = d = 0\end{aligned}$$

b) Los vectores de B son un sistema generador de C^2.

En efecto, sea $v = (z_1,z_2) = (a + bi \ , c + di)$ un vector de C^2, entonces

$$\begin{aligned}v = (a+bi,c+di) &= (a,c) + (bi,di) \\ &= (a,0) + (0,c) + (bi,0) + (0,di) \\ &= a(1,0) + c(0,1) + b(i,0) + d(0,i)\end{aligned}$$

1.74. Sea $P_n(X)$ el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual que n. Se considera el conjunto de vectores

$$B = \{X^o(1-X)^n,\ X(1-X)^{n-1}, X^2(1-X)^{n-2},\ \ldots\ ,\ X^n(1-X)^o\}$$

Demostrar que B es una base del espacio vectorial $P_n(X)$.

SOLUCION:

Se trata de ver que se verifica la siguiente implicación :

$$a_oX^o(1-X)^n + a_1X(1-X)^{n-1} + a_2X^2(1-X)^{n-2} + \ldots + a_nX^n(1-X)^o = 0 \Rightarrow a_o = a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$$

Esta relación se puede escribir de la siguiente forma :

$$a_o\left(\frac{X}{1-X}\right)^o(1-X)^n + a_1\left(\frac{X}{1-X}\right)^1(1-X)^n + a_2\left(\frac{X}{1-X}\right)^2(1-X)^n + \ldots + a_{n-1}\left(\frac{X}{1-X}\right)^{n-1}(1-X)^n +$$

$$\ldots + a_n\left(\frac{X}{1-X}\right)^n(1-X)^n = 0 .$$

Haciendo el siguiente cambio $y = \frac{X}{1-X}$ se obtiene la siguiente expresión:

$$(1-X)^n(a_oy^o + a_1y^1 + a_2y^2 + \ldots + a_{n-1}y^{n-1} + a_ny^n) = 0$$

Por tanto ,

$$a_oy^o + a_1y^1 + a_2y^2 + \ldots + a_{n-1}y^{n-1} + a_ny^n = 0$$

Siendo este polinomio idénticamente nulo resulta que :

$$a_o = a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$$

Luego el conjunto de los polinomios dados en B es un conjunto linealmente indepediente, y como la dimensión de $P_n(X)$ es $n+1$ resulta que B es una base de dicho espacio vectorial.

1.75. Sean u,v,w tres vectores de un espacio vectorial **V**(**R**). Demostrar que si u,v,w son lineamente independientes lo mismo sucede con los vectores $u+v$, $u-v$, $u - 2v + w$.

SOLUCION:

$$a(u+v) + b(u-v) + c(u-2v+w) = 0 \Rightarrow au + av + bu - bv + cu - 2cv + cw = 0$$

$$\Rightarrow (a + b + c)u + (a - b - 2c)v + cw = 0$$

y por ser los vectores u,v,w linealmente independientes, resulta:

$$\left.\begin{array}{r} a + b + c = 0 \\ a - b - 2c = 0 \\ c = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow (a,b,c) = (0,0,0)$$

Por tanto los vectores dados son linealmente independientes.

1.76. Sea $P_n(X)$ el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual que n. Demostrar que el conjunto de vectores (polinomios) de dicho espacio ,

$$\{(1+X)^n,\ X(1+X)^{n-1},\ \ldots\ , X^p(1+X)^{n-p}, \ldots\ ,\ X^n\}$$

es linealmente independiente. ¿Forman una base?.

SOLUCION:

1 Se trata de ver que

$$a_o(1+X)^n + a_1X(1+X)^{n-1} + \ldots + a_pX^p(1+X)^{n-p} + \ldots + a_nX^n \Longrightarrow a_o = a_1 = \ldots = a_n = 0$$

2 El desarrollo por el binomio de Newton de cada uno de los términos del primer miembro es :

$$a_o(1+X)^n = a_o(1 + \binom{n}{1}X + \binom{n}{2}X^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}X^{n-1} + \binom{n}{n}X^n)$$

$$a_1X(1+X)^{n-1} = a_1(X + \binom{n-1}{n}X^2 + \ldots + \binom{n-1}{n-2}X^{n-1} + \binom{n-1}{n-1}X^n)$$

....

$$a_{n-1}X^{n-1}(1 + X) = a_{n-1}(X^{n-1} + X^n)$$

$$a_n X^n = a_n X^n$$

3 Sumando y reduciendo términos del mismo grado se obtiene la siguiente expresión :

$$a_o + (a_o\binom{n}{1} + a_1)X + (a_o\binom{n}{2} + a_1\binom{n-1}{n} + a_2)X^2 + \ldots +$$

$$+ (a_o\binom{n}{n-1} + a_1\binom{n-1}{n-2} + \ldots + a_{n-1})X^{n-1} + (a_o + a_1 + a_2 + \ldots + a_n)X^n = 0$$

4 Siendo el conjunto $B = \{1,X,X^2, \ldots , X^n\}$ una base del $P_n(X)$ los coeficientes de la expresión anterior son todos nulos.

Por tanto $a_o = 0$.

De la relación $a_o\binom{n}{1} + a_1 = 0$ resulta que $a_1 = 0$

De la relación $a_o\binom{n}{2} + a_1\binom{n-1}{n} + a_2 = 0$ resulta que $a_2 = 0$

Repitiendo este proceso se obtiene : $a_o = a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$.

Siendo todos los coeficientes nulos, el conjunto

$$\{(1 + X)^n, X(1 + X)^{n-1},\ \ldots\ ,\ X^p(1 + X)^{n-p},\ \ldots\ ,\ X^n\}$$

es linealmente independiente

Nótese además que siendo la dimensión de $P_n(X)$, n + 1, forman una base de este espacio vectorial.

1.77. Sea $P_n(X)$ el espacio vectorial de los polinomios reales en una indeterminada, de grado menor o igual que n, juntamente con el polinomio cero. Se considera el subconjunto de polinomios

$$B = \{1, (X-h), (X-h)^2, (X-h)^3, \ldots, (X-h)^n\}$$

a) Demostrar que B es una base de $P_n(X)$

Hallar la dimensión de $P_n(X)$

b) Si n = 4, hallar las coordenadas del vector $p(X) = 5X^4+6X^3-4X+2$ respecto de la base $B = (1, (X-2), (X-2)^2, (X-2)^3, (X-2)^4)$

SOLUCION

a) $P_n(X)$ es una espacio vectorial cuya base canónica es

$$B = (1, X, X^2, X^3, \ldots, X^n)$$

La dimensión de $P_n(X)$ es evidentemente n+1.

Cada polinomio de la sucesión $1, (X-h), (X-h)^2, (X-h)^3, \ldots, (X-h)^n$ es de mayor grado que cualquiera de los anteriores, y, por tanto, no puede ser una combinación lineal de los que le preceden, luego estos n+1 polinomios son linealmente independientes y como la dimensión de $P_n(X)$ es n+1, forman una base.

b) B es una base de $P_4(X)$, luego

$$\begin{aligned} 5X^4+6X^3-4X+2 &= a_o + a_1(X-2) + a_2(X-2)^2 + a_3(X-2)^3 + a_4(X-2)^4 \\ &= a_o - 2a_1 + 4a_2 - 8a_3 + 16a_4 \quad + \\ &\quad (a_1 - 4a_2 + 12a_3 - 32a_4)X \quad + \\ &\quad (a_2 - 6a_3 + 24a_4)X^2 \quad + \\ &\quad (a_3 - 8a_4)X^3 \quad + \\ &\quad a_4 X^4 \end{aligned}$$

E identificando se tiene :

$$\left.\begin{aligned} a_o - 2a_1 + 4a_2 - 8a_3 + 16a_4 &= 2 \\ a_1 - 4a_2 + 12a_3 - 32a_4 &= -4 \\ a_2 - 6a_3 + 24a_4 &= 0 \\ a_3 - 8a_4 &= 6 \\ a_4 &= 5 \end{aligned}\right\}$$

Resolviendo este sistema triangular, empezando por la última ecuación y sustituyendo en la que le precede, se tiene :

$$a_4 = 6 \;,\; a_3 = 46 \;,\; a_2 = 156 \;,\; a_1 = 228 \quad y \quad a_o = 122$$

Por tanto, las coordendas del vector p(X) en la base B, son :

$$(a_o, a_1, a_2, a_3, a_4) = (122, 228, 156, 46, 5)$$

1.78. Sea $P_n(X)$ el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual que n. Se considera el conjunto de polinomios

$$B = \{1, X, X(X-1), X(X-1)(X-2), \ldots, X(X-1)(X-2)\ldots(X-n+1)\}$$

Demostrar que B es una base del espacio vectorial $P_n(X)$.

SOLUCION :

Se trata de ver que se verifica la siguiente implicación:

$$a_o + a_1X + a_2X(X-1) + a_3X(X-1)(X-2) + \ldots + a_nX(X-1)(X-2)\ldots(X-n+1) = 0 \implies$$

$$a_o = a_1 = a_2 = a_3 = \ldots = a_n = 0$$

Dando valores a X en la anterior expresión obtenemos :

$$\left.\begin{aligned} X = 0 &\implies 0 = a_o.1 \\ X = 1 &\implies 0 = a_o.1 + a_1.1 \\ X = 2 &\implies 0 = a_o.1 + a_1.2 + a_2.2.1 \\ X = 3 &\implies 0 = a_o.1 + a_1.3 + a_2.3.2 + a_3 3.2.1 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ X = n &\implies 0 = a_o.1 + a_1.n + a_2.n(n-1) + \ldots + a_n n! \end{aligned}\right\} \text{ de donde se tiene :}$$

$$a_o = a_1 = a_2 = a_3 = \ldots = a_n = 0$$

Luego B es un conjunto de vectores linealmente independiente, y como la dimensión de $P_n(X)$ es n+1 resulta que B es una base de dicho espacio.

1.79. Sea **V** el espacio vectorial de los polinomios en t de grado $\leq$n y el polinomio cero. Demostrar que cada uno de los conjuntos siguientes es una base de **V** :

i) $\{1, t, t^2, \ldots, t^{n-1}, t^n\}$

ii) $\{1, 1-t, (1-t)^2, \ldots, (1-t)^{n-1}, (1-t)^n\}$

SOLUCION :

i) a) Es evidente que todo polinomio de **V** es una combinación lineal de los vectores $1, t, t^2, \ldots, t^{n-1}, t^n$.

b) Además $1, t, t^2, \ldots, t^{n-1}, t^n$ son independientes puesto que ninguno de ellos es una combinación lineal de los vectores anteriores.

Por tanto, de a) y b) se deduce que $\{1, t, t^2, \ldots, t^{n-1}, t^n\}$ es una base de **V**.

La dimensión de **V** es, por consiguiente, n+1.

ii) a) Siendo $\dim \mathbf{V} = n+1$, una base de $\mathbf{V}$ está formada por $n+1$ vectores linealmente independientes.

b) Cada polinomio del conjunto $\{1,(1-t),(1-t)^2,\ldots,(1-t)^{n-1},(1-t)^n\}$ ordenado por grados es de mayor grado que cualquiera de los anteriores, y por tanto, no es una combinación lineal de los que le preceden. Luego, los $n+1$ polinomios, $1,(1-t),(1-t)^2,\ldots,(1-t)^{n-1},(1-t)^n$ son linealmente independientes y forman una base de $\mathbf{V}$.

1.80. Sea $P_2(x)$ el espacio vectorial de los polinomios en una indeterminada de grado menor o igual a 2. Sea $\mathbf{M}$ el subespacio engendrado por

$$\{x^2-1\ ,x+1\ ,\ x^2-7x-10\}$$

Hallar una base de $P_2(x)$ que contenga una base de $\mathbf{M}$.

<u>SOLUCION</u> :

1 La base canónica del espacio vectorial $P_2(x)$ es $B = (1,x,x^2)$
La dimensión , por tanto, de este espacio es 3.

2 Si el subespacio vectorial $\mathbf{M}$ está engendrado por

$$\{x^2-1\ ,\ x+1\ ,3x^2-7x-10\}$$

para saber su dimensión se trata de ver el número de vectores linealmente independientes.
El polinomio $3x^2-7x-10$ es una combinación lineal de los otros dos:

$$3x^2-7x-10 = 3(x^2-1) - 7(x+1)$$

El conjunto de vectores o polinomios $\{x^2-1\ ,\ x+1\}$ es linealmente independiente. En efecto de ,

$$a(x^2-1) + b(x+1) = 0$$

se sigue que $a = b = 0$. Por tanto se trata de una base de M.

3 Utilizando el teorem de Steinitz ampliamos la base $\{x^2-1\ ,\ x+1\}$ con un nuevo vector de la base canónica.

a) El conjunto de polinomios $\{1\ ,\ x^2-1\ ,\ x+1\}$ es una base de $P_2(x)$.
Los vectores son linealmente independientes:

$$a.1 + b(x^2-1) + c(x+1) = 0$$

implica que $a = b = c = 0$.

b) La dimensión del espacio vectorial engendrado por $\{1,x^2-1,x+1\}$ es 3, luego coincide con $P_2(x)$.

Por tanto se ha encontrado una base de $P_2(x)$ que es ampliación de la de M.

1.81. Sean $\mathbf{V}_1$ y $\mathbf{V}_2$ dos espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo $\mathbf{K}$. Demostrar que si $\dim \mathbf{V}_1 = n_1$ y $\dim \mathbf{V}_2 = n_2$ entonces

$$\dim (\mathbf{V}_1\times \mathbf{V}_2) = \dim \mathbf{V}_1 + \dim \mathbf{V}_2$$

<u>SOLUCION</u> :

Sea $B_1 = (x_1,x_2,\ldots,x_{n_1})$ una base de $\mathbf{V}_1$,

sea $B_2 = (y_1,y_2,\ldots,y_{n_2})$ una base de $\mathbf{V}_2$,

sea $B_{12} = ((x_1,0),(x_2,0),\ldots,(x_{n_1},0)\ ,\ (0,y_1),(0,y_2),\ \ldots\ ,(0,y_{n_2}))$

$$= (z_1\ ,\ z_2\ ,\ \ldots\ ,\ z_{n_1}\ ,\ z_{n_1+1}\ ,\ z_{n_1+2}\ ,\ \ldots\ ,\ z_{n_1+n_2})$$

entonces el conjunto B_{12} es una base del espacio vectorial $\mathbf{V}_1\times\mathbf{V}_2$

1 B_{12} es un sistema generador del espacio vectorial $\mathbf{V}_1\times \mathbf{V}_2$
En efecto , sea $u = (x,y) \in \mathbf{V}_1\times\mathbf{V}_2$ entonces $x \in \mathbf{V}_1$, $y \in \mathbf{V}_2$
y por tanto :

$$\begin{cases} x = a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_{n_1}x_{n_1} \\ y = b_1y_1 + b_2y_2 + \ldots + b_{n_2}y_{n_2} \end{cases}$$

luego

$$u = (x,y) = a_1(x_1,0) + a_2(x_2,0) + \ldots + a_{n_1}(x_{n_1},0) + b_1(0,y_1) + b_2(0,y_2) + \ldots + b_{n_2}(0,y_{n_2})$$
$$= c_1z_1 + c_2z_2 + \ldots + c_{n_1}z_{n_1} + c_{n_1+1}z_{n_1+1} + \ldots + c_{n_1+n_2}z_{n_1+n_2}$$

con $c_1 = a_1\ ,c_2 = a_2\ ,\ \ldots\ ,\ c_{n_1} = a_{n_1}\ ,\ c_{n_1+1} = b_1\ ,\ \ldots\ ,\ c_{n_1+n_2} = b_{n_2}$

2 El sistema B_{12} es linealmente independiente .
En efecto : $c_1z_1 + c_2z_2 + \ldots + c_{n_1+n_2}z_{n_1+n_2} = 0$ es equivalente a

$$\begin{cases} a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_{n_1}x_{n_1} = 0 \\ b_1y_1 + b_2y_2 + \ldots + b_{n_2}x_{n_2} = 0 \end{cases}$$

y por ser B_1 y B_2 bases se obtiene finalmente que los coeficientes son nulos , es decir ,

$$c_1 = a_1 = 0\ ,\ c_2 = a_2 = 0\ ,\ \ldots\ ,\ c_{n_1} = a_{n_1} = 0\ ,$$

$$c_{n_1+1} = b_1 = c_{n_1+2} = b_2 = \ldots = c_{n_1+n_2} = b_{n_2} = 0$$

Por tanto B_{12} es una base del espacio vectorial $\mathbf{V}_1\times \mathbf{V}_2$, luego

$$\dim (\mathbf{V}_1\times \mathbf{V}_2) = \text{card } B_{12} = n_1 + n_2$$

1.82. Sean W_1 y W_2 dos subespacios vectoriales distintos de dimensión 2 de un espacio vectorial de dimensión 3 sobre un cuerpo **K**. Demostrar que su intersección $W_1 \cap W_2$ tiene por dimensión 1.

SOLUCION :

Siendo W_1 y W_2 subespacios vectoriales distintos, el espacio suma $W_1 + W_2$ contiene estrictamente a W_1 y a W_2, por tanto $\dim(W_1 + W_2) > 2$, luego , $\dim(W_1+W_2)=3$ ya que es la dimensión máxima de un subespacio.

Por otra parte sabemos que

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2)$$

de donde, sustituyendo, $3 = 2 + 2 - \dim(W_1 \cap W_2)$

y en consecuencia, $\dim(W_1 \cap W_2) = 1$

1.83. Sea V^3 un espacio vectorial de dimensión tres sobre el cuerpo K, W_1 un subespacio vectorial de dimesión 1, W_2 otro subespacio vectorial de dimensión 2. Demostrar que

$$W_1 \cap W_2 = \{0\} \Rightarrow W_1 + W_2 = V^3$$

SOLUCION :

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim(W_1) + \dim(W_2) - \dim(W_1 \cap W_2)$$

y sustituyendo $\dim(W_1 + W_2) = 1 + 2 - 0 = 3$

y siendo $\dim(V^3) = 3$ se sigue que

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim(V^3) \quad \text{de donde} \quad W_1 + W_2 = V^3$$

1.84. Sea V^6 un espacio vectorial de dimensión 6, W_1 y W_2 dos subespacios distintos de dimensión 4. Hallar la posible dimensión de $W_1 \cap W_2$

SOLUCION :

Siendo los subespacios vectoriales distintos $W_1 + W_2$ contiene propiamente a W_1 y a W_2 , por tanto $\dim(W_1 + W_2) > 4$

Por otra parte, $\dim(W_1 + W_2) \leqslant 6$. Teniendo en cuenta la relación

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim(W_1) + \dim(W_2) - \dim(W_1 \cap W_2)$$

se tiene :

i) Si $\dim(W_1 + W_2) = 5$ entonces $5 = 4 + 4 - \dim(W_1 \cap W_2)$

ii) Si $\dim(W_1 + W_2) = 6$ entonces $6 = 4 + 4 - \dim(W_1 \cap W_2)$ de donde

la $\dim(W_1 \cap W_2)$ es 2 ó 3.

1.85. Sea $Z_{(5)}$ el cuerpo de los enteros módulo 5 ,o números congruentes módulo 5. Sea $Z^4_{(5)} = V$ el espacio vectorial sobre dicho cuerpo de dimensión 4. Sea el conjunto de vectores S :

$$S = \{(\bar1,\bar0,\bar2,\bar1) , (\bar0,\bar1,\bar2,\bar3) , (\bar3,\bar2,\bar0,\bar4)\}$$

1) Encontrar las ecuaciones paramétricas de **L**(S).

2) Encontrar las ecuaciones cartesianas de **L**(S).

3) Ver si el vector $(\bar1,\bar1,\bar1,\bar1)$ pertenece o no al subespacio **L**(S)

SOLUCION :

1) Aplicando el método de reducción en cascada se tiene :

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= (\bar1,\bar0,\bar2,\bar1) \\ x_2 &= (\bar0,\bar1,\bar2,\bar3) \\ x_3 &= (\bar3,\bar2,\bar0,\bar4) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} y_1 &= (\bar1,\bar0,\bar2,\bar1) = x_1 \\ y_2 &= (\bar0,\bar1,\bar2,\bar3) = x_2 \\ y_3 &= (\bar0,\bar2,\bar4,\bar1) = x_3 - \bar3 x_1 \end{aligned}\right.$$

Siendo $y_3 = \bar2\, y_2$, se sigue que y_1 e y_2 son vectores linealmente independientes y por tanto x_1 y x_2.

L(S) tiene una base $B = (x_1, x_2)$

Las ecuaciones paramétricas se obtienen así:

$x = (\bar x^1,\bar x^2,\bar x^3,\bar x^4)$ pertenece a la variedad **L**(S) si y solo si :

$$x = (\bar x^1,\bar x^2,\bar x^3,\bar x^4) = \bar a_1(\bar1,\bar0,\bar2,\bar1) + \bar a_2(\bar0,\bar1,\bar2,\bar3)$$

$$= (\bar a_1,\bar0,\bar2\bar a_1,\bar a_1) + (\bar0,\bar a_2,\bar2\bar a_2,\bar3\bar a_2)$$

$$= (\bar a_1,\bar a_2,\bar2\bar a_1 + \bar2\bar a_2,\bar a_1 + \bar3\bar a_2)$$

de donde ,

$$\left.\begin{aligned} \bar x^1 &= \bar a_1 \\ \bar x^2 &= \bar a_2 \\ \bar x^3 &= \bar2\bar a_1 + \bar2\bar a_2 \\ \bar x^4 &= \bar a_1 + \bar3\bar a_2 \end{aligned}\right\} \quad \text{Ecuaciones paramétricas de } \mathbf{L}(S)$$

2) Eliminando los parámetros a_1 y a_2 se obtienen las ecuaciones :

$$\left.\begin{aligned} \bar x^3 - \bar2\,\bar x^1 - \bar2\,\bar x^2 &= \bar0 \\ \bar x^4 - \bar x^1 - \bar3\,\bar x^2 &= \bar0 \end{aligned}\right\} \quad \text{equivalentes a}$$

$$\left.\begin{aligned} \bar3\,\bar x^1 + \bar3\,\bar x^2 + \bar x^3 &= \bar0 \\ \bar4\,\bar x^1 + \bar2\,\bar x^2 + \bar x^4 &= \bar0 \end{aligned}\right\} \quad \text{Ecuaciones cartesianas.}$$

3) El vector $(\bar1,\bar1,\bar1,\bar1)$ no satisface ninguna de las ecuaciones cartesianas , luego no pertenece a la variedad engendrada por S , **L**(S).

1.86. Se considera en $\mathbf{R}^4$ el subespacio $\mathbf{W}_1$ engendrado por los vectores $u_1 = (1,-1,0,1)$, $u_2 = (-1,0,1,0)$, $u_3 = (1,-2,1,2)$ y el subespacio W_2 engendrado por los siguientes vectores : $v_1 = (0,-1,1,1)$, $v_2 = (1,-2,1,2)$. Se pide :

1) Encontrar la dim $(\mathbf{W}_1 \cap \mathbf{W}_2)$
2) Hallar la ecuaciones paramétricas de dicha intersección.

S O L U C I O N :

1) Dado que $W_1 + W_2 = L(W_1 \cup W_2)$, se sigue que $W_1 + W_2$ está engendrado por

$$S = \{ u_1, u_2, u_3, v_1, v_2 \}$$

Para hallar una base de $W_1 + W_2$ basta extraer de S un conjunto maximal de vectores linealmente independientes.

Lo haremos por el método de reducción en "cascada".

$$\left\{\begin{aligned} u_1 &= (1,-1,0,1,)\\ u_2 &= (-1,0,1,0)\\ u_3 &= (\ 1,-2,1,2)\\ v_1 &= (0,-1,1,1)\\ v_2 &= (1,-2,1,2)\end{aligned}\right. \Rightarrow \left\{\begin{aligned} x_1 &= (1,-1,0,1) = u_1\\ x_2 &= (0,-1,1,1) = u_1 + u_2\\ x_3 &= (0,-1,1,1) = u_3 - u_1 = x_2\\ x_4 &= (0,-1,1,1) = x_2\\ x_5 &= (0,-1,1,1) = v_2 - u_1 = x_2\end{aligned}\right.$$

Los vectores x_1 y x_2 son linealmente independientes, y por tanto, sucede lo mismo con los vectores u_1 y u_2 . Luego una base de $\mathbf{W}_1 + \mathbf{W}_2$ es $\mathbf{B} = (u_1, u_2)$

Consecuencia:

$$\dim (W_1 + W_2) = 2$$

Si en la reducción anterior consideramos únicamente los tres primeros vectores se ve que hay dos linealmente independientes.Son $B = (u_1, u_2)$

Consecuencia :

$$\dim \mathbf{W}_1 = 2$$

Los vectores de $\mathbf{W}_2$, v_1 y v_2 son linealmente independientes ya que no son proporcionales sus coordenadas. Luego , $\dim \mathbf{W}_2 = 2$.

Sabemos que : $\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2)$

por tanto $2 = 2 + 2 - \dim(W_1 \cap W_2)$

luego , $\dim(W_1 \cap W_2) = 2$

2) La ecuaciones paramétricas de $\mathbf{W}_1 \cap W_2 = W_2$ son :

$$(x_1,x_2,x_3,x_4) = \lambda(0,-1,1,1,) + \mu(1,-2,1,2) = (\mu, -\lambda -2\mu, \lambda + \mu, \lambda + 2\mu)$$

1.87. Se consideran en $\mathbf{R}^4$ los subespacios vectoriales engendrados :

$\mathbf{W}_1$ por $S_1 = \{(1,1,1,1),(1,-1,1,-1)\}$

$\mathbf{W}_2$ por $S_2 = \{(1,1,0,1),(1,2,-1,2),(3,5,-2,5)\}$

Encontrar :

1) $\dim(\mathbf{W}_1 + \mathbf{W}_2)$
2) $\dim(\mathbf{W}_1 \cap \mathbf{W}_2)$
3) Ecuaciones de $\mathbf{W}_1 + \mathbf{W}_2$
4) Ecuaciones de $\mathbf{W}_1 \cap \mathbf{W}_2$

S O L U C I O N :

1) La dimensión de W_1 es 2 ya que los vectores no son proporcionales.

La dimensión de W_2 es también dos ya que ,

$$\begin{aligned}(3,5,-2,5) &= (1,1,0,1) + 2(1,2,-1,2)\\ &= (1,1,0,1) + (2,4,-2,4)\end{aligned}$$

Como base de W_2 tomaremos los dos primeros vectores.

Calculemos ahora la dimensión de $W_1 + W_2$. $W_1 + W_2$ viene engendrado por $S_1 \cup S_2$, y por tanto por los vectores de S_1 y S_2 linealmente independientes. Aplicando el método de reducción en cascada se obtiene:

$$\left\{\begin{aligned} x_1 &= (1,1,1,1)\\ x_2 &= (1,-1,1,-1)\\ x_3 &= (1,1,0,1)\\ x_4 &= (1,2,-1,2)\end{aligned}\right. \Rightarrow \left\{\begin{aligned} y_1 &= (1,1,1,1) = x_1\\ y_2 &= (0,-2,0,-2) = x_2 - x_1\\ y_3 &= (0,0,-1,0) = x_3 - x_1\\ y_4 &= (0,1,-2,1) = x_4 - x_1\end{aligned}\right. \Rightarrow$$

$$\left\{\begin{aligned} z_1 &= (1,1,1,1) = y_1 = x_1\\ z_2 &= (0,-2,0,-2) = y_2\\ z_3 &= (0,0,-1,0) = y_3\\ z_4 &= (0,0,-1,0) = y_4 + \tfrac{1}{2} y_2\end{aligned}\right.$$

De donde $\dim (W_1 + W_2) = 3$

Una base del subespacio vectorial $\mathbf{W}_1 + \mathbf{W}_2$ es $B = (x_1, x_2, x_3)$

2) Sabemos que se cumple la relación :

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2)$$

Sustituyendo : $3 = 2 + 2 - \dim(W_1 \cap W_2)$

Por tanto se verifica que $\dim(W_1 \cap W_2) = 1$

3) Las ecuaciones paramétricas de $\mathbf{W}_1 + \mathbf{W}_2$ son :

$$(x^1, x^2, x^3, x^4) = \lambda(1,1,1,1) + \mu(1,-1,1,-1) + \nu(1,1,0,1)$$

$= (\lambda,\lambda,\lambda,\lambda) + (\mu,-\mu,\mu,-\mu) + (\nu,\nu,0,\nu)$

$= (\lambda+\mu+\nu,\ \lambda-\mu+\nu,\ \lambda+\mu,\ \lambda-\mu+\nu)$

De donde ,
$$x^1 = \lambda+\mu+\nu$$
$$x^2 = \lambda-\mu+\nu$$
$$x^3 = \lambda+\mu$$
$$x^4 = \lambda-\mu+\nu$$

Eliminando los parámetros λ, μ, ν, se obtiene la ecuación cartesiana del subespacio vectorial $W_1 + W_2$:

$$x^2 - x^4 = 0$$

4) Las ecuaciones paramétricas de $W_1 \cap W_2$ se obtienen así :

Sea $x = (x^1,x^2,x^3,x^4)$ un vector de $W_1 \cap W_2$, entonce se cumplirá :

$$\left.\begin{array}{l} x \in W_1 \Rightarrow x = \alpha x_1 + \beta x_2 \\ x \in W_2 \Rightarrow x = \gamma x_3 + \delta x_4 \end{array}\right\}$$

de donde ,

$$\alpha(1,1,1,1) + \beta(1,-1,1,-1) = \gamma(1,1,0,1) + \delta(1,2,-1,2)$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} \alpha+\beta &=& \gamma+\delta \\ \alpha-\beta &=& \gamma+2\delta \\ \alpha+\beta &=& -\delta \\ \alpha-\beta &=& \gamma+2\delta \end{array}\right.$$

Resolviendo el sistema queda :

$$(\alpha,\beta,\gamma,\delta) = (-\tfrac{1}{2}\delta,\ -\tfrac{1}{2}\delta, -2\delta\ ,\ \delta\ )$$

Tomando $\delta = 1$ resulta que el vector x puede ser :

$$x = (x^1,x^2,x^3,x^4) = -2(1,1,0,1) + (1,2,-1,2) = (-1,0,-1,0)$$

Por tanto $(x^1,x^2,x^3,x^4) \in W_1 \cap W_2$ si y solo sí

$$(x^1,x^2,x^3,x^4) = \lambda\ (-1,0,-1,0)$$
$$= (-\lambda,0\ ,\ -\lambda\ ,\ 0)$$

que son las ecuaciones de la variedad o subespacio vectorial $W_1 \cap W_2$

Las ecuaciones cartesianas se obtienen eliminando el parámetro λ :

$$\left.\begin{array}{r} x^1 - x^3 = 0 \\ x^2 = 0 \\ x^4 = 0 \end{array}\right\} \quad \text{Ecuaciones cartesianas.}$$

1.88. Se considera en R^3 el subespacio siguiente :

$W = \{(x,y,z)/\ x + y - z = 0\ ,\ x + y + z = 0\}$ .Hallar :

1) La ecuación de un suplementario.

2) Descomponer según W y el suplementario calculado en 1) el vector $(1,2,1)$ de R^3

S O L U C I O N :

1) a) El vector $x_1 = (1,-1,0)$ es un vector de W.

b) Si queremos completar una base de W tenemos que encontrar un vector $x_2 = (a,b,c)$ que deberá cumplir :

1°) $x_2 \in W$, es decir , $\left\{\begin{array}{l} a+b-c=0 \\ a+b+c=0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{r} a+b=0 \\ c=0 \end{array}\right.$ (1)

2°) Los vectores x_1 y x_2 han de ser linealmente independientes

De las condiciones dadas en (1) resulta que $x_2 = (a,b,c) = (a,b,0) = (\ a,-a,0) = a(1,-1,0)$, luego todo vector x_2 es proporcional a x_1 y no puede ser independiente.

De a) y b) se deduce que $B = \{(1,-1,0)\}$ es una base de W , y dim $W = 1$.

Vamos a completar una base de R^3.

Sea $x_2 = (1,1,0) \notin W$ según se ha visto en 2°). Por tanto x_1 y x_2 son dos vectores linealmente independientes de R^3.

Sea finalmente $x_3 = (m,n,p)$ entonces x_1,x_2,x_3 son linealmente independientes, si lo son los vectores $(1,-1,0),(0,2,0),(0,0,p)$ puesto que

$$\left\{\begin{array}{l}(1,-1,0)\\(1,1,0)\\(m,n,p)\end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l}(1,-1,0)\\(0,2,0)\\(0,n+m,p)\end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l}(1,-1,0)\\(0,2,0)\\(0,0,p)\end{array}\right.$$ .Para ello basta tomar $p \neq 0$

El vector x_3 puede ser por tanto : $x_3 = (0,0,1)$

Sea W' el subespacio engendrado por x_2 y x_3 , entonces $W + W' = R^3$ por el teorema de compleción de la base.

Las ecuaciones del subespacio W' son las siguientes :

$u = (x,y,z) \in W' \Leftrightarrow (x,y,z) = \lambda(1,1,0) + \mu(0,0,1) = (\lambda,\lambda,\mu)$

De donde $W' = \{(x,y,z)/\ (x,y,z) = (\lambda,\lambda,\mu)\ ,\ \lambda,\mu \in R\}$

2) La expresión de vector $u = (1,2,1)$ es : $(1,2,1) = (\alpha,\beta,\gamma) + (\lambda,\lambda,\mu)$ con $\alpha+\beta+\gamma = 0$ y $\alpha+\beta-\gamma = 0$, es decir , se tiene el sistema :

$$\left.\begin{array}{l} 1 = \alpha+\lambda \\ 2 = \beta+\lambda \\ 1 = \gamma+\mu \\ 0 = \alpha+\beta+\gamma \\ 0 = \alpha+\beta-\gamma \end{array}\right\}$$

De donde se obtienen :

$\gamma = 0\ ,\ \mu = 1\ ,\ \lambda = 3/2\ ,\ \beta = 1/2\ ,\ \alpha = -1/2$

Luego $(1,2,1) = (-1/2,1/2,0) + (3/2,3/2,1)$

1.89. Sea $Z_{(5)}$ el cuerpo de los números congruentes módulo 5, y sea $V = Z^4_{(5)}$ el espacio vectorial sobre dicho cuerpo.
Se considera en **V** el subespacio vectorial **W** de ecuaciones ,

$$\begin{cases} \bar{3}x + \bar{2}y - z + t = \bar{0} \\ x + y + z + \bar{2}t = \bar{0} \end{cases}$$

1) Encontrar un suplementario **W'** de **W**.
2) Descomponer el vector $v = (\bar{1},\bar{2},\bar{0},\bar{0})$ según **W** y **W'** calculado en apartado anterior.

S O L U C I O N :

1) Cálculo de una base de **W**.

Para ello hallemos en primer lugar un vector de **W**. Multiplicando la primera ecuación por $\bar{3}$ y sumándole la segunda se tiene :

$$\bar{2}y + \bar{3}z = \bar{0}$$

de la que es solución , $z = \bar{1}$, $y = \bar{1}$.

Sustituyendo en el sistema dado obtenemos el siguiente :

$$\begin{cases} \bar{3}x + t = \bar{4} \\ x + \bar{2}t = \bar{3} \end{cases}$$

Las dos ecuaciones son iguales , luego una solución es $x = t = \bar{1}$.

Por tanto un vector de **W** es : $(\bar{1},\bar{1},\bar{1},\bar{1}) = u$

Tenemos que buscar ahora otro vector, sea $v = (\bar{a},\bar{b},\bar{c},\bar{d})$, tal que u y v sean linealmente independientes o lo que es lo mismo que v no sea múltiplo de u; para ello basta que v no tenga todas las componentes iguales y que pertenezca a **W**. Se puede elegir el vector $v = (\bar{1},\bar{2},\bar{2},\bar{0})$.

Una base de **W** es por tanto, $B = (u,v) = ((\bar{1},\bar{1},\bar{1},\bar{1}),(\bar{1},\bar{2},\bar{2},\bar{0}))$

Vamos a encontrar ahora dos vectores w y t tales que $B_1 = (u,v,w,t)$ sea una base del espacio vectorial $Z^4_{(5)}$. Sea $w = (\bar{x},\bar{y},\bar{z},\bar{t})$ y $t = (\bar{m},\bar{n},\bar{p},\bar{r})$

Utilizando el procedimiento en cascada se tiene:

$$\begin{cases} (\bar{1},\bar{1},\bar{1},\bar{1}) \\ (\bar{1},\bar{2},\bar{2},\bar{0}) \\ (\bar{x},\bar{y},\bar{z},\bar{t}) \\ (\bar{m},\bar{n},\bar{p},\bar{r}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (\bar{1},\bar{1},\bar{1},\bar{1}) \\ (\bar{0},\bar{1},\bar{1},\bar{4}) \\ (\bar{0},\bar{y}-\bar{x},\bar{z}-\bar{x},\bar{t}-\bar{x}) \\ (\bar{0},\bar{n}-\bar{m},\bar{p}-\bar{m},\bar{r}-\bar{m}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (\bar{1},\bar{1},\bar{1},\bar{1}) \\ (\bar{0},\bar{1},\bar{1},\bar{4}) \\ (\bar{0},\bar{0},\bar{z}-\bar{y},\bar{t}+\bar{3}\bar{x}+\bar{y}) \\ (\bar{0},\bar{0},\bar{p}-\bar{m},\bar{r}+\bar{3}\bar{m}+\bar{n}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (\bar{1},\bar{1},\bar{1},\bar{1}) \\ (\bar{0},\bar{1},\bar{1},\bar{4}) \\ (\bar{0},\bar{0},\bar{1},\bar{t}+\bar{3}\bar{x}+\bar{y}) \\ (\bar{0},\bar{0},\bar{0},\bar{r}+\bar{3}\bar{m}+\bar{n}) \end{cases}$$

donde, $\bar{c} - \bar{b} = \bar{1}$ y $\bar{p} - \bar{m} = \bar{0}$, es decir , $\bar{c} = \bar{1} + \bar{b}$ y $\bar{p} = \bar{m}$; además $\bar{r} + \bar{3}\bar{m} + \bar{n} \neq 0$, es decir, $\bar{r} + \bar{n} \neq \bar{2}$

Por tanto, tomando $\bar{t} = \bar{0}$, $\bar{x} = \bar{0}$, $\bar{y} = \bar{1}$, $\bar{z} = \bar{2}$
y $\bar{p} = \bar{m} = \bar{1}$, $\bar{r} = \bar{1}$, $\bar{n} = \bar{0}$

se tienen los vectores w y t : $w = (\bar{0},\bar{1},\bar{2},\bar{0})$ y $t = (\bar{1},\bar{0},\bar{1},\bar{1})$

La base B_1 viene dada por : $((\bar{1},\bar{1},\bar{1},\bar{1}),(\bar{1},\bar{2},\bar{2},\bar{0}),(\bar{0},\bar{1},\bar{2},\bar{0}),(\bar{1},\bar{0},\bar{1},\bar{1}))$

Los dos primeros son la base de **W** y los otros dos del suplementario **W'**.

Las ecuaciones paramétricas de **W'** suplementario de **W** son :

$$(x,y,z,t) = \bar{a}(\bar{0},\bar{1},\bar{2},\bar{0}) + \bar{b}(\bar{1},\bar{0},\bar{1},\bar{1})$$
$$= (\bar{b} , \bar{a} , \bar{2}\bar{a} + \bar{b} , \bar{b}) \quad \text{con } \bar{a},\bar{b} \in Z^4_{(5)}$$

Las ecuaciones cartesianas de W' son :

$$\begin{cases} x - t = \bar{0} \\ z - 2y - x = \bar{0} \end{cases}$$

2) La descomposición del vector $v = (\bar{1},\bar{2},\bar{0},\bar{0})$ es la siguiente:

$$(\bar{1},\bar{2},\bar{0},\bar{0}) = \bar{a}(\bar{1},\bar{1},\bar{1},\bar{1}) + \bar{b}(\bar{1},\bar{2},\bar{2},\bar{0}) + \bar{c}(\bar{0},\bar{1},\bar{2},\bar{0}) + \bar{d}(\bar{1},\bar{0},\bar{1},\bar{1})$$
$$= (\bar{a} + \bar{b},\bar{a}+\bar{2}\bar{b},\bar{a}+\bar{2}\bar{b},\bar{a}) + (\bar{d},\bar{c},\bar{2}\bar{c}+\bar{d},\bar{d})$$

Por tanto,

$$\begin{cases} \bar{1} = \bar{a} + \bar{b} + \bar{d} \\ \bar{2} = \bar{a} + \bar{2}\bar{b} + \bar{c} \\ \bar{0} = \bar{a} + \bar{2}\bar{b} + \bar{2}\bar{c} + \bar{d} \\ \bar{0} = \bar{a} + \bar{d} \end{cases}$$

cuya solución es : $(\bar{a},\bar{b},\bar{c},\bar{d}) = (\bar{1},\bar{1},\bar{4},\bar{4})$

De lo anterior se deduce que :

$$(\bar{1},\bar{2},\bar{0},\bar{0}) = (\bar{2},\bar{3},\bar{3},\bar{1}) + (\bar{4},\bar{4},\bar{2},\bar{4}) ,$$

donde $(\bar{2},\bar{3},\bar{3},\bar{1}) \in$ **W** y $(\bar{4},\bar{4},\bar{2},\bar{4}) \in$ **W'**

1.90. En R^6 se considera el subespacio vectorial engendrado por el conjunto de vectores S , **L**(S) :

S = {(1,1,-1,1,0,1),(0,0,-1,1,2,0),(3,0,1,5,-1,-1),(5,2,-2,8,1,0)}

1) Hallar las ecuaciones cartesianas (= NO paramétricas) de **L**(S)
2) ¿Pertenece el vector (1,1,1,0,0,1) a **L**(S)?
3) En caso negativo sustituir los ceros por números tales que el vector resultante si pertenezca.

S O L U C I O N :

1) Aplicando el método de reducción en cascada :

$$\begin{cases} x_1 = (1,1,-1,1,0,1) \\ x_2 = (0,0,-1,1,2,0,) \\ x_3 = (3,0,1,5,-1,-1) \\ x_4 = (5,2,-2,8,1,0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = (1,1,-1,1,0,1) = x_1 \\ y_2 = (0,0,-1,1,2,0) = x_2 \\ y_3 = (0,-3,4,2,-1,-4) = x_3 - 3x_1 \\ y_4 = (0,-3,3,3,1,-5) = x_4 - 5x_1 \end{cases}$$

y continuando el proceso de reducción en cascada hasta obtener vectores con uno, dos , tres o más ceros en la primera posición, resulta :

$$\begin{cases} z_1 = (1,1,-1,1,0,1) = y_1 \\ z_2 = (0,0,-1,1,2,0) = y_2 \\ z_3 = (0,-3,4,2,-1,-4) = y_3 \\ z_4 = (0,0,-1,1,2,-1) = y_4 - y_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} w_1 = z_1 = y_1 = x_1 \\ w_2 = z_2 = y_2 = x_2 \\ w_3 = z_3 = y_3 = x_3 - 3x_1 \\ w_4 = (0,0,0,0,0,-1) = z_4 - z_2 = y_4 - y_3 - y_2 \\ \qquad = x_4 - x_3 - x_2 - 2x_1 \end{cases}$$

Los vectores w_1, w_2, w_3, w_4 son linealmente independientes y por tanto lo mismo sucede con los vectores x_1, x_2, x_3, x_4 y forman una base de $\mathbf{L}(S)$.
$x = (x^1, x^2, x^3, x^4, x^5, x^6)$ pertenece a la variedad $\mathbf{L}(S)$ si,y solo si,

$$(x^1, x^2, x^3, x^4, x^5, x^6) = a_1(1,1,-1,1,0,1,) + a_2(0,0,-1,1,2,0) + a_3(3,0,1,5,-1,-1) + a_4(5,2,-2,8,1,0)$$

de donde se obtiene :

$$\left.\begin{array}{l} x^1 = a_1 + 3a_3 + 5a_4 \\ x^2 = a_1 + 2a_4 \\ x^3 = -a_1 - a_2 + a_3 - 2a_4 \\ x^4 = a_1 + a_2 + 5a_3 + 8a_4 \\ x^5 = 2a_2 - a_3 + a_4 \\ x^6 = a_1 - a_3 \end{array}\right\}$$

Eliminando los parámetros a_1, a_2, a_3, a_4 se obtienen las ecuaciones cartesianas de $\mathbf{L}(S)$, y son:

$$\left.\begin{array}{r} 11x^1 - 5x^2 - 6x^4 + 3x^5 = 0 \\ 2x^1 - 2x^2 - x^3 - x^4 = 0 \end{array}\right\}$$

2) Se trata ahora de ver si el vector (1,1,1,0,0,1) pertenece o no a la variedad $\mathbf{L}(S)$. Sustituyendo se comprueba que no verifica las ecuaciones de la variedad $\mathbf{L}(S)$.

3) Sea ahora el vector $x = (1,1,1,x^4,x^5,1)$ entonces se debe cumplir :

$$\left.\begin{array}{r} 11 - 5 - 6x^4 + 3x^5 = 0 \\ 2 - 2 - 1 - x^4 = 0 \end{array}\right\}$$

Resolviendo el sistema se obtiene : $x^4 = -1$, $x^5 = -4$

Por tanto, el vector pedido es : (1,1,1,-1,-4,1) que pertenece al subespacio vectorial $\mathbf{L}(S)$.